

80
70
60
50
40
30
20
10
0
P. P
EUCLIDIS
ELEMENTORUM

LIBRI PRIORES SEX,
ITEM
UNDECIMUS & DUODECIMUS.

Ex Versione Latina
FEDERICI COMMANDINI.

In usum Juventutis Academicæ.



OXONIÆ,
E THEATRO SHELDONIANO.
Impensis Henr. Clements Bibliopolæ Oxoniensis. MDCCI.

EUCCLIDIS ELEMENTORUM

LIBRIS SEX.



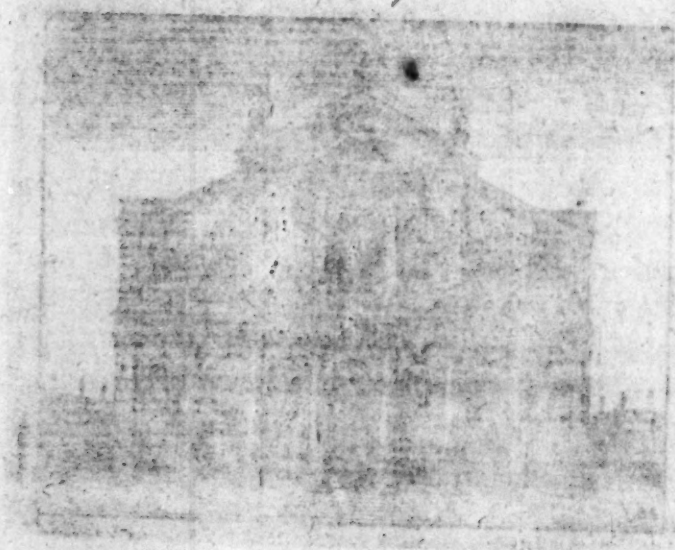
LIBRIS SEX.

UNDECIMUS & DUODECIMUS.

Ex Versione Latina

FEDERICI COMMANDINI

In usum Inventoris Academicæ.



OXONIAE.

IN THEATRO SHREWSBURY.

Impensis Henr. Gloucest. Bibliopoli Oxoniensis.

PRÆFATIO.

POST tot nova Geometriæ Elementa, non ita pridem in lucem emissa, est fortasse quod miretur Tyro Mathematicus, annosa hæc, & (ut quibusdam videntur) obsoleta Euclidis *ταρχαία* è prelo denuo prodire: præsertim cum non pauca in illis vitia detexisse sibi visi sint, qui Geometriam Elementarem novâ quadam methodo excolendam proponunt. Hi enim Lyncei Philosophi Euclidis Definitiones parum perspicuas, demonstrationes vix evidentes, res omnes malo ordine dispositas, aliasque mendas innumeras, per omnem antiquitatem ad sua usque tempora latentes, se invenisse jactant.

At tantorum virorum pace audacter assero, Euclidem ab iis immerito reprehensum esse, ejusque Definitiones distinctas & claras, è primis principis & conceptibus nostris petitas esse; demonstrationes Elegantes perspicuas & concinnas; ratiocinandi vim adeo evidentem & nervosam, ut facile inducar credere obscuritatem istam à sciolis illis toties insinulatam, confusis potius & perplexis eorum ideis, quam demonstrationibus ipsis imputandam esse. Et utcumque nonnulli querantur de malâ rerum dispositione, & iniquo ordine, quem tenet Euclides, aliam tamen methodum magis idoneam, & discipulis faciliorem inter omnia hoc genus scripta invenio nullam.

Non meum est hęc loci hypercriticis Horum capti-
unculis sigillatim respondere: sed in his Elementis
vel mediocriter versato, statim patebit, Calumnia-
tores hos suam potius oscitantiam monstrare, quam
veros in nostro authore lapsus arguere; imo ne hoc
quidem dicere vereor, quod vix, & ne vix quidem
unum, aut alterum è tot novis systematibus inveniri
potest, in quibus plures non sunt labe, imo fœdiores
paralogismi, quam in Euclidem vel fingere potuerunt.

Post tot infelices in Geometriâ reformandâ cona-
tus, quidam non infimi Geometre Elementa de
novo construere non ausi, ipsum Euclidem omnibus
aliis Elementorum Scriptoribus merito prætulerunt,
eique edendo suas curas impenderunt; hi tamen
ipsi nescio quibus opinionibus ducti, alias propo-
sitiones prorsus omittunt, aliarumque demonstrationes
in pesus mutant. Inter hos eminent Tacquetus &
Deschalles, quorum utrique malo quodam fato con-
tiguit, ut elegantes quasdam & in Elementis optimo
jure ponendas propositiones quasi ineptas & inutiles
rejecerint, quales sunt propositiones 27, 28, 29. li-
bri sexti, cum aliis nonnullis quarum usus fortasse
illos latebat. Insuper quandocunque ipsas Euclidis
demonstrationes deserunt, multum in argumentando
peccant, & à concinnitate Veterum recedunt.

In libro quinto demonstrationes Euclidis in to-
tum repudiarunt, & Proportionis definitionem aliis
terminis conceptam attulerunt; at quæ unam tan-
tum è duabus proportionalium speciebus comprehen-
dit, & quantitativis commensurabilibus solummodo
competit: nihilominus suas, quæ sunt de proportione,
demonstrationes omni quantitati tam incommensu-
rabilis quam commensurabilis in sequentibus libris ap-
plicant.

plicant. Hunc tam turpem lapsum nec Logici nec Geometrae facile condonassent, nisi hi authores in aliis suis scriptis de Scientiis Mathematicis bene meruissent. Hoc quidem commune est iis vitium cum omnibus hodiernis Elementorum Scriptoribus, qui in eundem impingunt scopulum, & ut suam in hac materia ostendent peritiam, authorem nostrum in re minime culpandâ imo laudandâ reprehendunt. Quantitatum proportionalium definitionem intelligo, in quâ intellectu facilem proportionalium proprietatem exponit, quae quantitatum omnibus tam incommensurabilibus quam commensurabilibus aequae convenit, & à quâ ceterae omnes proportionalium proprietates facile consequuntur.

Huius proprietatis demonstrationem in Euclide desiderant Egregii hi Geometrae, atque defectum demonstrationis suae suppleandum suscipiunt. Hic iterum contemplari licet imperitiam eorum in Logica peritiam, qui definitionis nominis demonstrationem expectant: talis enim est haec Euclidis definitio, quae illas quantitates proportionales vocat, quae conditiones in definitione sua allatas obtinent. Quidni primo Elementorum auctori licebat qualibet nomina quantitatum haec requisita habentibus, arbitrio suo assignare? Licebat proculdubio, suo igitur utitur jure, & eas proportionales vocat.

Sed operae pretium erit, methodum, quâ hanc proprietatem demonstrare conantur, perpendere. Affectionem quandam uni tantum proportionalium generi, viz. commensurabilium, congruentem assumunt; & exinde multis ambagibus longâque conclusionum serie universalem, quam Euclides posuit, proportionalium proprietatem deducunt; quod certe tam methodo quam

quam argumentationis regulis satis alienum esse videtur. At longe rectius fecissent, si proprietatem universalem ab Euclide assignatam primo posuissent, & exinde particularem illam & uni tantum proportionalium speciei congruentem deduxissent. Quoniam vero hanc respuerunt methodum, talem demonstrationem ad finem hujus præfationis attexere libuit. Qui Euclidem ulterius defensum videre cupiunt, consulant eruditas & summo judicio conscriptas Lectiones Mathematicas Cl. Barovii an. 1666.

Cum vero tanti Geometra incidit mentio, præterire non possum Elementa ab eo edita, in quibus plerumque ipsas Euclidis constructiones & demonstrationes retinet, ne una quidem omisa propositione. Hinc oritur major in demonstrando vis, pulchrior construendi methodus, & ubique Veterum Geometrarum genius clarius elucescit, quam in libris istius generis fieri solet. Plura præterea Corollaria & Scholia adiecit, non modo breviori sequentium demonstrationi inservientia, verum etiam aliis in rebus perutilia.

Nihilominus demonstrationes ejus cā brevitate laborant, tot symbolis notisque implicantur, ut in Geometriā parum versato difficiles & obscuræ fiant. Multæ propositiones quæ ipsum Euclidem legenti perspicuæ viderentur, Algebraicâ hac demonstrandi methodo tyronibus nodosæ & vix intelligibiles redduntur, qualis est V. G. 13. primi Elementi. Demonstrationum, quas in Elemento secundo attulit, difficilis admodum tyronibus est intelligentia; rectius multo Euclides ipse earum evidentiam (ut in re Geometricâ fieri debet) a figurarum contemplatione petit. Scientiarum omnium Elementa simplicissima
*
methodo

methodo tradenda sunt, nec symbolis nec notis nec obscuris principiis aliunde petitis involvenda.

Ut Elementa Barovii nimia brevitate, sic ea, quae à Clavio traduntur, molestâ prolixitate peccant. Scholiis enim Commentariisque abundat nimis & luxuriat. Vix equidem arbitror Euclidem tam obscurum esse, ut tantâ farragine notarum indigeat; nec dubito quin tyrones omnes Euclidem ipsum omnibus suis Commentatoribus faciliorem inventuri sint. In demonstrationibus Geometricis ut nimia brevitatis tenebras parit, sic nimia verborum plus tædii & confusionis quam lucis affert.

Hiscæ præcipue inductis rationibus, prima sex Euclidis Elementa cum undecimo & duodecimo, ex versione Federici Commandini in usum Juventutis Celeberrimæ hujus Academiæ per se edenda curavi, à cæteris abstinui, tum quia hæc, quæ jam damus, ad alias plerasque Matheseos partes, quæ nunc vulgo traduntur, intelligendas, sufficiant, tum etiam quia omnia Euclidis opera, quæ jam sub prelo sudant, brevi tempore nitidissimis Characteribus Græcis & Latinis adornata, summaque curâ & fide emendata è Theatro Sheldoniano prodibunt.

ALITER

THEO

THEOREMA.

Si quatuor magnitudines sint proportionales, hoc est, conditiones habeant ab Euclide in definitione quinta quinti libri positas, sitque prima secunda commensurabilis, dico, quot partes prima continet secunda, tot etiam similes partes quarta tertiam continere.

Sint $A B C D$ quatuor quantitates proportionales, sitque prima A æqualis quibuscumque partibus secundæ scilicet sit æqualis quinque partibus quartis ipsius B , dico etiam æqualem fore quinque partibus quartis ipsius D . Quoniam enim est ut A ad B ita C ad D erit alternando ut A ad C ita B ad D , ut autem B ad D ita $5B$ ad $5D$ & ut $5B$ ad $5D$ ita $3B$ ad $3D$ per 15. quinti, quare etiam ut A ad C ita $3B$ ad $3D$, sed est prima A æqualis tertiæ $3B$. quare per 14. quinti, erit secunda C æqualis quartæ $3D$ q.e.d. Universaliter sic; si $A B C D$ proportionales, sitque A æqualis $\frac{n}{m}B$, erit & C æqualis $\frac{n}{m}D$. Quoniam enim est A ad B ut C ad D , erit ut A ad C ita B ad D , ut autem B ad D ita per 15. quinti, nB ad nD , & per eandem est ut nB ad nD ita $\frac{n}{m}B$ ad $\frac{n}{m}D$: quare erit ut A ad C ita $\frac{n}{m}B$ ad $\frac{n}{m}D$; sed est prima A æqualis tertiæ $\frac{n}{m}B$, quare per 14. quinti erit secunda C æqualis $\frac{n}{m}D$. Q.E.D.

A L I T E R.

Sint $A B C D$ proportionales, sitque A æqualis $\frac{n}{m}B$; dico fore C æqualem $\frac{n}{m}D$. Quoniam enim est A æqualis $\frac{n}{m}B$, erit mA æqualis ipsi nB . Sumantur jam ipsarum A & C primæ scilicet & tertiæ æque multiplices mA & mC , item nB & nD æque multiplices ipsarum B & D . Cum igitur

igitur quatuor quantitates $A B C D$ sunt proportionales sumptæque sunt primæ A &

tertiæ c æque multiplices $m A$ $m c$, A B C D

item secundæ B & quartæ D aliæ $n A$ $n B$ $m C$ $n D$

etiam æque multiplices, per defi-

nitionem quintam Elementi quinti si $m A$ sit major

æqualis vel minor ipsâ $n B$, erit eodém modo $m c$ æ-

qualis major vel minor ipsâ $n D$, sed est $m A$ æqualis

$n B$, quare erit & $m c$ æqualis $n D$, ac proinde c æqualis

$\frac{n}{m} D$. Quod erat demonstrandum.

A circular library stamp from the University of Toronto Libraries. The text "UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARIES" is arranged in a circle around the center. In the center, the year "1957" is printed at the top, and the number "4114" is printed below it. The stamp is slightly faded and has a textured appearance.

[illegible]

POINT

EUCCLIDIS
ELEMENTORUM.

LIBER PRIMUS.

DIFFINITIONES.

I.

Punctum est, cuius nulla est pars, vel quod magnitudinem nullam habet.

II.

Linea vero est longitudo latitudinis expers.

III.

Lineæ termini sunt puncta.

IV.

Recta linea est, quæ ex æquo suis interjicitur punctis.

V.

Superficies est id, quod longitudinem, & latitudinem tantum habet.

VI.

Superficieî termini sunt lineæ.

VII.

Plana superficies est quæ ex æquo suis interjicitur lineis.

VIII.

Planus angulus est duarum linearum in plano sese contingentium, & non in directum jacentium, alterius ad alteram inclinatio.

IX.

Quando autem quæ angulum continent rectæ lineæ fuerint, rectilineus angulus appellatur.

A

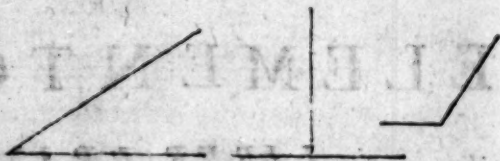
X.

X.

Cum vero recta linea super rectâ lineâ insistens eos, qui deinceps sunt angulos æquales inter se fecerit, rectus est uterque æqualium angulorum : & quæ insistit recta linea perpendicularis vocatur ad eam, cui insistit.

XI.

Obtusus angulus est, qui major est recto.



XII.

Acutus autem, qui recto est minor.

XIII.

Terminus est, quod alicujus extremum est.

XIV.

Figura est, quæ aliquo, vel aliquibus terminis continetur.

XV.

Circulus est figura plana una linea contenta, quæ circumferentia appellatur : ad quam ab uno puncto intra figuram existente omnes rectæ lineæ pertingentes sunt æquales.

XVI.

Hoc autem punctum centrum circuli nuncupatur.

XVII.

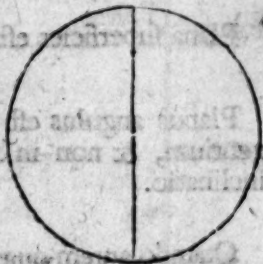
Diameter circuli est recta quædam linea per centrum ducta, & ex utraque parte à circumferentia circuli terminata, quæ quidem, & bifariam circulum secat.

XVIII.

Semicirculus est figura, quæ continetur diametro, & ea quæ ex ipsa circuli circumferentia intercipitur.

XIX.

Segmentum circuli est figura, quæ recta linea, & circuli circumferentia continetur.



XX.

XX.

Rectilineæ figuræ sunt, quæ rectis continentur lineis.

XXI.

Trilateræ quidem, quæ tribus.

XXII.

Quadrilateræ, quæ quatuor.

XXIII.

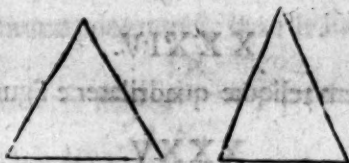
Multilateræ vero, quæ pluribus, quam quatuor rectis lineis comprehenduntur.

XXIV.

Trilaterarum figurarum æquilaterum est triangulum, quod tria latera habet æqualia.

XXV.

Isoceles, five æquicrura, quod duo tantum æqualia latera habet.

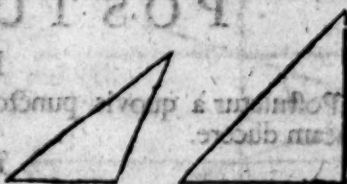


XXVI.

Scalenum vero est, quod tria inæqualia habet latera.

XXVII.

Ad hæc, trilaterarum figurarum, rectangulum quidem est triangulum, quod rectum angulum habet.



XXVIII.

Obtusangulum est, quod obtusum habet angulum.

XXIX.

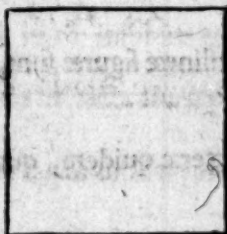
Acutangulum vero, quod tres acutos angulos habet.

A 2

XXX.

XXX.

Quadrilaterarum figurarum quadratum est quod, & æquilaterum est, & rectangulum.



XXXI.

Altera parte longior figura est, quæ rectangula quidem æquilatera vero non est.

XXXII.

Rhombus, quæ æquilatera quidem, sed rectangula non est.

XXXIII.

Rhomboides, quæ, & opposita latera, & oppositos angulos inter se æquales habet, neque æquilatera est, neque rectangula.



XXXIV.

Præter has autem reliquæ quadrilateræ figuræ trapezia vocentur.

XXXV.

Parallelæ, seu æquidistantes rectæ lineæ sunt, quæ cum in eodem sint plano, & ex utraque parte in infinitum producantur, in neutram partem inter se conveniunt.

POSTULATA.

I.

Postuletur à quovis puncto ad quodvis punctum rectam lineam ducere.

II.

Rectam lineam terminatam in continuum, & directum producere.

III.

Quovis centro, & intervallo circulum describere.

AXIOMATA.

LIBER I. AXIOMATA.

5

I.

Quæ eidem æqualia, & inter se sunt æqualia.

II.

Et si æqualibus æqualia adjiciantur tota sunt æqualia.

III.

Et si ab æqualibus æqualia auferantur, reliqua sunt æqualia.

IV.

Et si inæqualibus æqualia adjiciantur, tota sunt inæqualia.

V.

Et si ab inæqualibus æqualia auferantur, reliqua sunt inæqualia.

VI.

Et quæ ejusdem duplicia sunt, inter se sunt æqualia.

VII.

Et quæ ejusdem dimidia sunt, inter se sunt æqualia.

VIII.

Et quæ sibi mutuo congruunt, inter se sunt æqualia.

IX.

Totum est sua parte majus.

X.

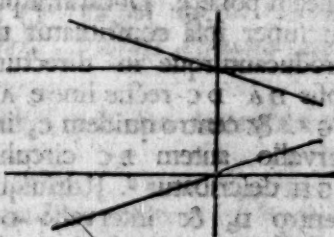
Duæ rectæ lineæ spatium non comprehendunt.

XI.

Omnes anguli recti inter se æquales sunt.

XII.

Et si in duas rectas lineas recta linea incidens interiores, & ex eadem parte angulos duobus rectis minores fecerit, rectæ lineæ illæ in infinitum productæ, inter se conveniunt ex ea parte, in qua sunt anguli duobus rectis minores.



Not. Cum plures anguli ad unum punctum existunt designatur quilibet tribus literis quarum illa quæ est ad verticem anguli in medio ponitur, V.G. in figura Prop. 12. libri primi angulus à rectis AB, BC compræhensus dicitur angulus ABC & angulus à rectis AB, BE contentus dicitur angulus ABE.

A 3

PROPO.

PROPOSITIO I. PROBLEMA.

Super data rectâ lineâ terminatâ, triangulum æquilaterum constituere.

a 3. Post.

b 1. Post.

c 15. def.

Sit data recta linea terminata AB oportet super ipsa AB triangulum æquilaterum constituere. Centro quidem A intervallo autem AB circulus describatur BCD^a . Et rursus centro B , intervalloque BA describatur circulus ACE^a , & à puncto C , in quo circuli se invicem secant ad AB ducantur rectæ lineæ CA CB^b . Quoniam igitur A centrum est circuli DBC , erit AC ipsi AB æqualis, & rursus quoniam B circuli CAE est centrum, erit BC æqualis BA ostensa est autem, & CA æqualis AB . utraque igitur ipsarum CA CB ipsi AB est æqualis. Quæ autem eidem sunt æqualia, & inter se æqualia sunt. Ergo CA ipsi CB est æqualis. tres igitur CA AB BC inter se sunt æquales; ac propterea triangulum æquilaterum est ABC , & constitutum est super data recta linea terminata AB , quod fecisse oportebat.



PROP. II. PROBL.

Ad datum punctum data rectæ lineæ æqualem rectam lineam ponere.

a Postul. 1.

b Prima hujus.

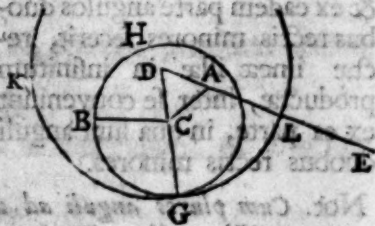
c Postul. 2.

d 3. Post.

e Diffin. 15.

f Axiom. 3.

Sit datum quidem punctum A , data vero recta linea BC oportet ad A punctum ipsi BC rectæ lineæ æqualem rectam lineam ponere. Ducatur à puncto A ad C recta linea AC^a : & super ipsa constituatur triangulum æquilaterum DAC^b . producanturque in directum ipsis DA DC rectæ lineæ AE CG^c . & centro quidem C , intervallo autem BC circulus BGH describatur d . Rursusque centro D , & intervallo DC describatur circulus GKL . Quoniam igitur punctum C centrum est BGH circuli, erit BC ipsi CG æqualis e . Et rursus quoniam D centrum est circuli GKL , erit DL æqualis DC : quarum DA est æqualis DC . reliqua igitur AL reliquæ GC est æqualis f . Ostensa autem



autem est BC æqualis CG . Quare utraque ipsarum AL BC est æqualis ipsi CG . Quæ autem eidem æqualia sunt, & inter se sunt æqualia. Ergo, & AL est æqualis BC . Ad datum igitur punctum A datæ rectæ lineæ BC æqualis posita est AL . Quod facere oportebat.

PROP. III. PROBL.

Duabus datis rectis lineis inæqualibus à majori minori æqualem abscindere.

Sint datæ duæ rectæ lineæ inæquales AB & C ; quarum major sit AB . oportet à majori AB minori C æqualem rectam lineam abscindere. Ponatur ad A punctum ipsi C æqualis recta linea AD ; & centro quidem A , intervallo autem AD circulus describatur DEF . Et quoniam A centrum est DEF circuli erit AE ipsi AD æqualis. Sed & C æqualis AD . Utraque igitur ipsarum AE C ipsi AD æqualis erit. Quare, & AE ipsi C est æqualis. Duabus igitur datis rectis lineis inæqualibus AB C à majori AB minori C æqualis Abcissa est AE . Quod fecisse oportebat.



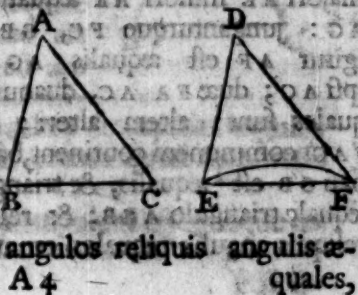
Per antecedentem.
post. 3.

Axiom. 1.

PROP. IV. THEOR.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri; habeant autem, & angulum angulo æqualem, qui æqualibus rectis lineis continentur: & basim basi æqualem habebunt; & triangulum triangulo æquale erit; & reliqui anguli reliquis angulis æquales, alter alteri; quibus æqualia latera subtenduntur.

Sint duo triangula ABC DEF , quæ duo latera AB AC duobus lateribus DE DF æqualia habeant, alterum alteri, videlicet latus quidem AB lateri DE æquale, latus vero AC ipsi DF ; & angulum BAC angulo EDF æqualem. Dico, & basim BC basi EF æqualem esse, & triangulum ABC æquale triangulo DEF , & reliquos angulos reliquis angulis æ-



A 4

quales,

æquales, alterum alteri; quibus æqualia latera subtenduntur, nempe angulum ABC angulo DEF : & angulum ACB angulo DCE . Triangulo enim ABC applicato ipsi DEF , & puncto quidem A posito in D recta vero linea AB in ipsa DE : & punctum B puncto E congruet; quod AB ipsi DE sit æqualis. Congruente autem AB ipsi DE ; congruet, & AC recta linea rectæ lineæ DF cum angulus BAC sit æqualis angulo EDF . Quare, & C congruet ipsi F : est enim recta linea AC æqualis rectæ DF . Sed, & punctum B congruebat puncto E . Ergo, & basis BC basi EF congruet. Nam si puncto quidem B congruente ipsi E , C vero ipsi F ; basis BC basi EF non congruit; duæ rectæ lineæ spatium comprehendent: quod fieri non potest. Congruet igitur BC basis, basi EF , & ipsi æqualis erit. Quare, & totum ABC triangulum congruet toti triangulo DEF , & ipsi erit æquale; & reliqui anguli reliquis angulis congruent, & ipsis æquales erunt. Videlicet angulis ABC angulo DEF , & angulus ACB angulo DCE . Si igitur duo triacula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri, habeant autem & angulum angulo æqualem, qui æqualibus rectis lineis continentur: & basim basi æqualem habebunt; & triangulum triangulo æquale erit; & reliqui anguli reliquis angulis æquales, alter alteri, quibus æqualia latera subtenduntur: quod ostendere oportebat.

PROP. V. THEOR.

Isoſcelium triangulorum qui ad basim sunt anguli inter se sunt æquales, & productis æqualibus rectis lineis anguli qui sunt sub basi inter se æquales erunt.

Sit isoſceles triangulum ABC ; habens AB latus lateri AC æquale, & producantur in directum ipsis AB AC rectæ lineæ BD CE . Dico angulum quidem ABC angulo ACB , angulum vero CBD angulo BCE æqualem esse. Sumatur enim in linea BD , quodvis punctum F : atque à majori AE minori AF æqualis auferatur AG : junganturque FC , GB . Quoniam igitur AF est æqualis AG ; AB vero ipsi AC ; duæ FA AC , duabus GA AB æquales sunt, altera alteri; & angulum FAG communem continent, basis igitur FC basi GB est æqualis, & triangulum AFC æquale triangulo AGB ; & reliqui anguli, reliquis angulis æquales erunt, alter alteri; quibus æqualia latera



lateralia subtenduntur: Videlicet angulus quidem ACF æqualis angulo ABG ; angulus vero AFC ; angulo AGB . Et quoniam tota AF , toti AG est æqualis; quarum AB est æqualis AC ; erit & reliqua BF reliquæ CG æqualis. Ostensa est *Axiom. 3.* autem FC æqualis GB . duæ igitur BF , FC duabus CG , GB æquales sunt, altera alteri; & angulus BFC æqualis angulo CGB : estque basis ipsorum BC communis. Ergo & triangulum BFC triangulo CGB æquale erit; & reliqui anguli reliquis angulis æquales, alter alteri; quibus æqualia lateralia subtenduntur. Angulus igitur FBC est æqualis angulo GCB ; & angulus BCF angulo CBG . Itaque quoniam totus ABG angulus toti angulo ACF æqualis ostensus est, quorum angulus CBG est æqualis ipsi BCF : erit reliquus ABC reliquo ACB æqualis: & sunt ad basim ABC trianguli: ostensus autem est & FBC angulus æqualis angulo GCB ; qui sunt sub basi. Iloscelium igitur triangulorum, [qui ad basim anguli inter se sunt æquales, & productis æqualibus rectis lineis anguli, qui sunt sub basi inter se æquales erunt. Quod ostendisse oportebat.

Cor. Hinc omne triangulum æquilaterum est quoque æquiangulum.

PROP. VI. THEOR.

Si trianguli duo anguli inter se sint æquales, & æquales angulos subtendentia lateraliter inter se æqualia erunt.

Sit triangulum ABC , habens angulum ABC angulo ACB æqualem. Dico & AB latus lateri AC æquale esse; si enim inæqualis est AB ipsi AC ; altera ipsarum est major. Sit major AB ; atque à majori AB minori AC æqualis auferatur DB ; & DC jungatur. Quoniam igitur DB est æqualis ipsi AC ; communis autem BC : erunt duæ DB , BC duabus AC , CB æquales, altera alteri; & angulus DBC æqualis angulo ACB ex hyp. Basis igitur DC basi AB est æqualis, & triangulum DBC æquale triangulo ACB , minus majori; quod est absurdum. Non igitur inæqualis est AB ipsi AC . Ergo æqualis erit. Si igitur trianguli duo anguli inter se sint æquales, & æquales angulos subtendentia lateraliter inter se æqualia erunt: quod monstrasse oportuit.

Cor. Hinc omne triangulum æquiangulum est quoque æquilaterum.



a 3. hujus.

b 4. hujus.

PRO.

PROP. VII. THEOR.

In eadem recta linea duabus eisdem rectis lineis aliæ duæ rectæ lineæ æquales, altera alteri non constituentur ad aliud, atque aliud punctum, ad easdem partes, eosdem, quos primæ rectæ lineæ, terminos habentes.

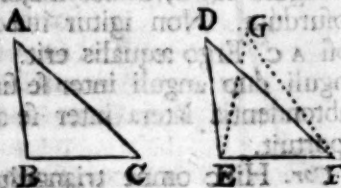
Si enim fieri potest, in eadem recta linea AB duabus eisdem rectis, lineis AC CB aliæ duæ rectæ lineæ AD DB æquales, altera alteri constituentur ad aliud, atque aliud punctum C D ; ad easdem partes ut ad CD , eosdem habentes terminos A B , quos primæ rectæ lineæ, ita ut CA quidem sit æqualis DA , eundem, quem ipsa terminum, habens A ; CB verò sit æqualis DB , eundem habens B terminum; & CD jungatur. Itaque quoniam AC est æqualis AD ; erit, & $\angle ACD$ $\angle ADC$ æqualis. Major igitur est $\angle ADC$ $\angle BCD$. Quare $\angle BDC$ $\angle BCD$ multo major erit. Rursus quoniam CB est æqualis DB & $\angle BDC$ æqualis erit $\angle BCD$: ostensus autem est ipso multo major; quod fieri non potest. Non igitur in eadem recta linea duabus eisdem rectis lineis aliæ duæ rectæ lineæ æquales, altera alteri constituentur ad aliud, atque aliud punctum, ad easdem partes, eosdem, quos primæ rectæ lineæ, terminos habentes; quod ostendisse oportebat.



PROP. VIII. THEOR.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri; habeant autem, & basim basi æqualem; angulum quoque, qui æqualibus lateribus continetur angulo æqualem habebunt.

Sint duo triangula ABC , DEF , quæ duo latera AB , AC duobus lateribus DE DF æqualia habeant alterum alteri; ut sit AB quidem æquale DE ; AC vero ipsi DF habeant autem, & basim BC basi EF æqualem.



Dico

Dico angulum quoque BAC angulo EDF æqualem esse. Triangulo enim ABC applicato ipsi DEF triangulo, & puncto quidem B posito in E ; recta vero linea BC in EF : congruet, & C punctum puncto F , quoniam BC ipsi EF est æqualis. Itaque congruente BC ipsi EF ; congruent & BA AC ipsis ED DF . si enim basis quidem BC basi EF congruit; latera autem BA AC lateribus ED DF non congruunt, sed situm mutant; ut EG GF : constituentur in eadem recta linea, duabus eisdem rectis lineis, aliæ duæ rectæ lineæ æquales, altera alteri; ad aliud atque aliud punctum; ad easdem partes; eosdem habentes terminos. non constituuntur autem; ut demonstratum est. non igitur, si basis BC congruit basi EF , ^{a per 7. hujus.} non congruent & BA AC latera lateribus ED DF . congruent igitur. Quare & angulus BAC angulo EDF congruet, & ipsi erit æqualis. Si igitur duo triangula, duo latera, duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri; habeant autem & basim basi æqualem: angulum quoque æqualibus lateribus contentum angulo æqualem habebunt: quod demonstrare oportebat.

PROP. IX. PROBL.

Datum angulum rectilineum bifariam secare.

Sit datus angulus rectilineus BAC : itaque oportet ipsum bifariam secare. Sumatur in linea AB quodvis punctum D ; & à linea AC ipsi AD æqualis ^a auferatur AE ; junctæque DE constituatur super ea ^b triangulum æquilaterum DEF ; & AF jungatur. Dico angulum BAC à recta linea AF bifariam secari. Quoniam enim AD est æqualis AE ; communis autem AF : duæ DA AF duabus EA AF æquales sunt, altera alteri; & basis DF . æqualis basi EF angulus ^c igitur DAF angulo EAF est æqualis. quare datus angulus rectilineus BAC à recta linea AF bifariam sectus est: quod facere oportebat.



^a 3. hujus.

^b 1. hujus.

^c 3. hujus.

PROP. X. PROBL.

Datam rectam lineam terminatam bifariam secare.

Sit data recta linea terminata AB oportet ipsam AB bifariam secare. constituatur super ^a ea triangulum æquilaterum ABC ; ^a 1. hujus. &

Dico

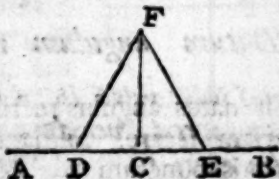
69. hujus. & secetur $\angle ACB$ angulus $\angle$ bifariam recta linea CD . Dico AB rectam lineam in puncto D bifariam secari. Quoniam enim AC est æqualis CB ; communis autem CD ; duæ ACD duabus BCD æquales sunt; altera alteri; & $\angle ACD$ æqualis $\angle BCD$. basis igitur AD basi BD est æqualis. Et ob id recta linea terminata AB bifariam secta est in puncto D : quod facere oportebat.



PROP. XI. PROBL.

Data rectæ lineæ à puncto in ipsa dato ad rectos angulos rectam lineam ducere.

- Sit data recta linea AB , & datum in ipsa punctum C . oportet à puncto C ipsi AB ad rectos angulos rectam lineam ducere. Sumatur in AC quodvis punctum D : ipsique CD æqualis $\angle$ ponatur CE , & super DE constituatur $\triangle$ æquilaterum FDE , & FC jungatur. Dico datæ rectæ lineæ AB à puncto C in ipsa dato, ad rectos angulos ductam esse FC . Quoniam enim DC est æqualis CE , & FC communis; erunt duæ DC CE duabus EC CF æquales, altera alteri; & basis DF est æqualis basi FE . $\angle DCF$ $\angle ECF$ est æqualis, & sunt deinceps. Quando autem recta linea super rectam lineam insistens, eos qui deinceps sunt, $\angle$ æquales inter se fecerit: rectus $\angle$ est uterque æqualium $\angle$ orum. ergo uterque ipsorum DCF FCE est rectus. Data igitur rectæ lineæ AB à puncto in ipsa dato C ad rectos angulos ducta est FC recta linea. Quod fecisse oportuit.

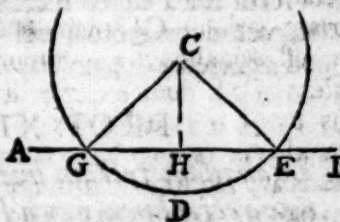


PROP. XII. PROBL.

Super data recta linea infinita, à dato puncto, quod in ea non est, perpendicularem rectam lineam ducere.

Sit data quidem recta linea infinita AB , datum vero punctum C , quod in ea non est. Oportet super data recta linea

linea infinita AB , à dato puncto C , quod in ea non est, perpendicularem rectam lineam ducere. Sumatur enim ad alteras partes ipsius AB rectæ lineæ quodvis punctum D : & centro quidem C , intervallo autem CD circulus a describatur EDG : & EG in H bifariam a fecetur: junganturque CG CH CE .



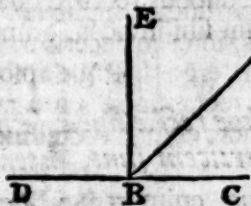
a Postul. 3.
 b 10. hujus.

Dico super data recta linea infinita AB , à dato puncto C , quod in ea non est, perpendicularem CH ductam esse. Quoniam enim æqualis est GH ipsi HE , communis autem HC , duæ GH HC , duabus EH HC æquales sunt, alter alteri; & basis CG est æqualis basi CE . Angulus igitur CHG angulo EHG est a æqualis, & sunt deinceps, cum autem recta b 8. hujus. linea super rectam lineam insistens eos, qui deinceps sunt angulos, æquales inter se fecerit, rectus d est uterque æqualium d Diffin. 10. angulorum & quæ insitit recta linea perpendicularis appellatur ad eam, cui insitit. ergo super data recta linea infinita AB à dato puncto C , quod in ea non est, perpendicularis ducta est CH . Quod facere oportebat.

PROP. XIII. THEOR.

Cum recta linea super rectam consistens lineam angulos fecerit, vel duos rectos, vel duobus rectis æquales efficiet.

Recta enim linea quædam AB super rectam CD consistens angulos faciat CBA ABD . Dico CBA ABD angulos; vel duos rectos esse, vel duobus rectis æquales, si enim CBA est æqualis ipsi ABD : duo recti a sunt; sin minus, ducatur à puncto B ipsi CD ad rectos b angulos BE . anguli igitur CBE EBD sunt duo recti. Et quoniam CBE , duobus CBA ABE est æqualis, communis apponatur EBD : ergo anguli CBE



a Diffin. 10.

b 11. hujus.

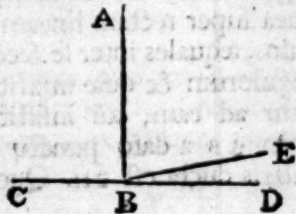
EBD tribus angulis CBA ABE EBD sunt a æquales. Rursus a Axiom. 2. quoniam DBA angulus est æqualis duobus DBE EBA , communis apponatur ABC . anguli igitur DBA ABC tribus DBE EBA ABC æquales sunt. At ostensum est angulos quoque CBE EBD eidem tribus æquales esse: quæ vero eidem sunt æqualia, d & inter se æqualia sunt: ergo & anguli CBE EBD d Axiom. 1. ipsis DBA ABC sunt æquales, suntque CBE EBD duo recti anguli

anguli igitur $\angle DBA$ $\angle ABC$ duobus rectis æquales erunt, ergo cum recta linea super rectam lineam consistens angulos fecerit, vel duos rectos, vel duobus rectis æquales efficiet. Quod oportebat demonstrare.

PROP. XIV. THEOR.

Si ad aliquam rectam lineam, atque ad punctum in ea duæ rectæ lineæ non ad easdem partes positæ, angulos qui deinceps sunt, duobus rectis æquales fecerint; ipsæ rectæ lineæ in directum sibi invicem erunt.

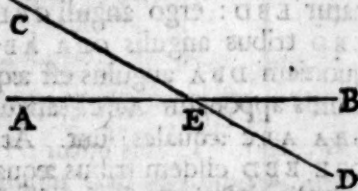
Ad aliquam enim rectam lineam AB , atque ad punctum in ea B , duæ rectæ lineæ BC BD non ad easdem partes positæ angulos, qui deinceps sunt, $\angle ABC$ $\angle ABD$ duobus rectis æquales faciant. Dico BD ipsi CB in directum esse. si enim BD non est in directum ipsi CB , sit ipsi CB in directum BE . Quoniam igitur recta linea AB super rectam CBE consistit; anguli $\angle ABC$ $\angle ABE$ duobus rectis sunt æquales. Sed & anguli $\angle ABC$ $\angle ABD$ sunt æquales duobus rectis. Anguli igitur $\angle CBA$ $\angle ABE$ ipsis $\angle CBA$ $\angle ABD$ æquales erunt. Communis auferatur $\angle ABC$. Ergo reliquus $\angle ABE$ reliquo $\angle ABD$ est æqualis, minor majori quod fieri non potest. Non igitur BE est in directum ipsi BC . Similiter ostendemus neque aliam quampiam esse, præter BD . Ergo CB ipsi BD in directum erit. Si igitur ad aliquam rectam lineam, atque ad punctum in ea duæ rectæ lineæ non ad easdem partes positæ angulos, qui deinceps sunt, duobus rectis æquales fecerint, ipsæ rectæ lineæ in directum sibi invicem erunt. Quod demonstrare oportebat.



PROP. XV. THEOR.

Si duæ rectæ lineæ se invicem secuerint, angulos qui ad verticem sunt, inter se æquales efficiant.

Duæ enim rectæ lineæ AB CD se invicem secant in puncto E . Dico angulum quidem $\angle AEC$ angulo $\angle DEB$; angulum vero $\angle CEB$ angulo $\angle AED$ æqualem esse. Quoniam enim recta linea AE super rectam CD consistens angulos facit $\angle CEA$ $\angle AED$; erunt hi duobus rectis æquales.



æquales. Rursus quoniam recta linea DE super rectam AB consistens facit angulos AED DEB; erunt AED DEB anguli æquales ^a duobus rectis. Ostensum autem est angulos quoque CEA AED duobus rectis esse æquales. Anguli igitur CEA AED angulis AED DEB æquales sunt. Communis auferatur AED. Ergo reliquus ^b CEA reliquus ^b BED est æqua- ^b Axiom. 3. lis. Simili ratione, & anguli CEB DEA æquales ostenduntur. Si igitur duæ rectæ lineæ se invicem secuerint, angulos, qui ad verticem sunt, æquales efficient. Quod ostendere oportebat.

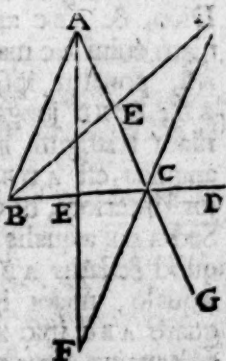
Cor. 1. Ex hoc manifeste constat duas rectas lineas se invicem secantes, facere angulos ad sectionem quatuor rectis æquales.

Cor. 2. Omnes anguli circa unum punctum constituti faciunt angulos quatuor rectis æquales.

PROP. XVI. THEOR.

Omnis trianguli uno latere producto exterior angulus utrovis interiore, & opposito est major.

Sit triangulum ABC, & unum ipsius latus BC ad D producat. Dico exteriorem angulum ACD utrovis interiore, & opposito, videlicet CBA, & BAC majorem esse. Secetur enim AC bifariam ^a in E, & juncta BE producat ad F; ponaturque ipsi BE æqualis EF. Jungatur præterea FC, & ducta AC ad G producat. Quoniam igitur AE quidem est æqualis EC, BE vero ipsi EF, duæ AE EB duabus CE EF æquales sunt, altera alteri: & angulus AEB angulo FEC est æqualis ^b, ad verticem enim sunt. Basis igitur AB æqualis ^c est basi FC; & ABE triangulum triangulo FEC & reliqui anguli reliquis angulis æquales, alter alteri, quibus æqualia latera subtenduntur. Ergo angulus BAE est æqualis angulo ECF. Sed ECD angulus major est ipso ECF. Major igitur est angulus ACD angulo BAE. Similiter recta linea BC bifariam lecta, ostendetur etiam BCG angulus, hoc est ACD angulus angulo ABC major. Omnis igitur trianguli uno latere producto exterior angulus utrovis interiore, & opposito major est. Quod oportebat demonstrare.



^a 10. hujus.

^b 15. hujus.

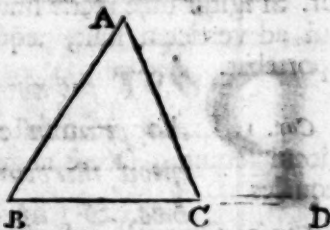
^c 4. hujus.

PROPO-

PROP. XVII. THEOR.

Omnis trianguli duo anguli duobus rectis minores sunt, quomodocunque sumpti.

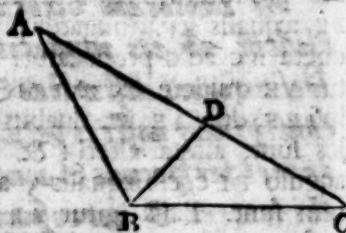
Sit triangulum ABC . Dico ipsius ABC trianguli duos angulos quomodocunque sumptos duobus rectis minores esse. Producat enim BC ad D . Et quoniam trianguli ABC exterior angulus ACD major ^a est interiore, & opposito ABC : communis apponatur ACB . Anguli igitur ACD , ACB angulis ABC ACB majores sunt. Sed ACD ACB sunt ^b æquales duobus rectis. Ergo ABC BCA duobus rectis sunt minores. Similiter demonstrabimus angulos quoque BAC ACB itemque CAB ABC duobus rectis minores esse. Omnis igitur trianguli duo anguli duobus rectis minores sunt; quomodocunque sumpti. Quod demonstrare oportebat.



PROP. XVIII. THEOR.

Omnis trianguli majus latus majorem angulum subtendit.

Sit triangulum ABC habens latus AC latere AB majus. Dico, & ABC angulum angulo BCA majorem esse. Quoniam enim AC major est, quam AB , ponatur ipsi AB æqualis AD ; & BD jungatur. Et quoniam trianguli BDC exterior angulus est ADB , erit is major ^a interiore, & opposito DCB . Sed ADB æqualis ^b est ipsi ABD , quod & latus AB lateri AD fit æquale, major igitur est & ABD angulus angulo ACE , quare ABC ipso ACB multo major erit. Omnis igitur trianguli majus latus majorem angulum subtendit: quod oportebat demonstrare.



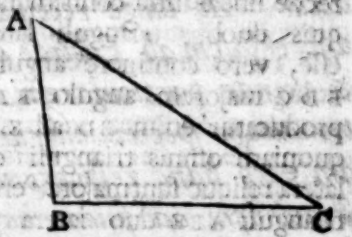
PROP. XIX. THEOR.

Omnis trianguli major angulus majus latus subtendit.

Sit triangulum ABC majorem habens ABC angulum angulo BCA . Dico & latus AC latere AB majus esse. Si enim non

non

non est majus; vel AC est æquale ipsi AB , vel ipso minus, æquale igitur non est; nam & angulus ABC angulo ACB æqualis ^a esset; non est autem. Non igitur AC ipsi AB est æquale. Sed neque minus. esset enim & angulus ABC angulo ACB minor^b. atque non est, non igitur AC minus est ipso AB . Ostensum autem est neque æquale esse. : ergo AC ipso AB est majus. Omnis igitur trianguli major angulus majus latus subtendit. Quod oportebat demonstrare.



a 5. hujus.]

b 12. hujus.

PROP. XX. THEOR.

Omnis trianguli duo latera reliquo majora sunt, quomodocunque sumpta.

Sit enim triangulum ABC . Dico ipsius ABC trianguli duo latera reliquo majora esse, quomodocunque sumpta: videlicet latera quidem BA AC majora latere BC ; latera vero AB BC majora latere AC ; & latera BC CA majora ipso AB producatur enim BA ad punctum D ; ponaturque ipsi CA æqualis AD ^a; & DC jungatur. quoniam igitur DA est æqualis AC erit & angulus ADC angulo ACD æqualis^b. B



a 3. hujus.

b 5. hujus.

Sed BCD angulus major est angulo ACD . Angulus igitur BCD angulo ADC est major; Et quoniam triangulum est DCB habens BCD angulum majorem angulo BDC : majorem autem angulum majus latus subtendit^c: erit latus DB latere BC majus. sed DB est æquale ipsis BA AC . quare latera BA AC ipso BC majora sunt. similiter ostendemus, & latera quidem AB BC majora esse latere CA : latera vero BC CA ipso AB majora. Omnis igitur trianguli duo latera reliquo majora sunt, quomodocunque sumpta. Quod ostendere oportebat.

c 19. hujus.

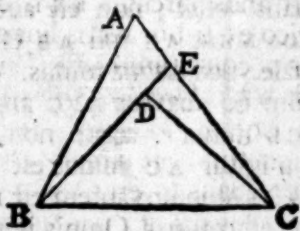
PROP. XXI. THEOR.

Si à terminis unius lateris trianguli duæ rectæ lineæ intra constituentur, hæc reliquis utrobis trianguli lateribus minores quidem erunt, majorem vero angulum continebunt.

B

Trian-

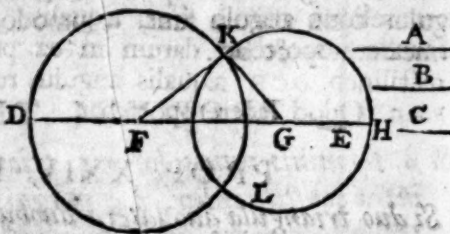
Trianguli enim ABC in uno latere BC à terminis B & C duæ rectæ lineæ intra constituentur BD & DC . Dico BD & DC reliquis duobus trianguli lateribus BA & AC minores quidem esse, vero continere angulum BDC majorem angulo BAC .
 producat enim BD ad E . & quoniam omnis trianguli duo latera reliqua sunt majora ⁴ erunt trianguli ABE duo latera BA & AE majora latere BE . communis apponatur EC . ergo ⁶ BA & AC ipsis BE & EC majora ⁶ sunt. rursus quoniam CED trianguli duo latera CE & ED sunt majora latere CD , communis apponatur DB . quare CE & EB ipsis CD & DB sunt majora ⁶. Sed ostensum est BA & AC majora esse BE & EC . multo igitur BA & AC ipsis BD & DC majora sunt. rursus quoniam omnis trianguli exterior angulus interiore & opposito est major ¹⁶ : erit trianguli CDE exterior angulus BDC major ipso CED . Eadem ratione & trianguli ABE exterior angulus CEB ipso BAC est major ¹⁶ sed angulus BDC ostensus est major angulo CEB . multo igitur BDC angulus angulo BAC major erit. Quare si à terminis unius lateris trianguli duæ rectæ lineæ intra constituentur, hæ reliquis duobus trianguli lateribus minores quidem erunt, majorem vero angulum continebunt. Quod demonstrare oportebat.



PROP. XXII. PROBL.

Ex tribus rectis lineis, quæ tribus rectis lineis datis æquales sint, triangulum constituere. Oportet autem duas reliqua majores esse, quomodocunque sumptas; quoniam omnis trianguli duo latera reliqua majora sunt, quomodocunque sumpta.

Sint tres datæ rectæ lineæ A , B , C , quarum duæ reliqua majores sint, quomodocunque sumptæ, ut scil. A & B quidem sint majores quam C , A & C vero majores quam B , & præterea B & C majores quam A . Itaque oportet ex rectis lineis æqualibus ipsis A , B , C triangulum constituere exponatur aliqua recta linea DE , terminata quidem ad D , infinita vero ad E , & ponatur

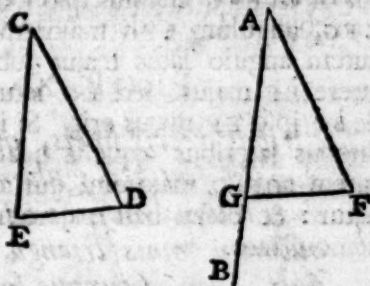


ponatur ipsi quidem A æqualis $\cdot$ DF, ipsi vero B æqualis FG, $\cdot$ 3. hujus.
 & ipsi C æqualis GH: & centro F, intervallo autem FD
 circulus $\cdot$ describatur DKL. rursusque centro G, & intervallo $\cdot$ 3. Postul.
 GH alius circulus K LH describatur, & jungantur KF KG.
 Dico ex tribus rectis lineis æqualibus ipsis A B C triangulum
 KFG constitutum esse. quoniam enim punctum F centrum
 est DKL circuli; erit FD æqualis $\cdot$ FK. sed FD est æqualis $\cdot$ diffn. 15.
 A. Ergo & FK ipsi A est æqualis. rursus quoniam punctum
 G centrum est circuli LKH, erit GH æqualis $\cdot$ GK. sed GH
 est æqualis C. ergo & GK ipsi C æqualis erit. est autem &
 FG æqualis B: tres igitur rectæ lineæ KF FG GK tribus
 ABC æquales sunt. Quare ex tribus rectis lineis KF FG GK,
 quæ sunt æquales tribus datis rectis lineis ABC, triangulum
 constitutum est KFG. Quod facere oportebat.

PROP. XXIII. PROBL.

*Ad datam rectam lineam, & ad datum in ea punctum,
 dato angulo rectilineo æqualem angulum rectilineum
 constituere.*

Sit data quidem recta linea AB, datum vero in ipsa pun-
 ctum A; & datus angulus rectilineus DCE. Oportet igitur
 ad datam rectam lineam AB, & ad datum in ea punctum A
 dato angulo rectilineo
 DCE, æqualem angulum
 rectilineum constituere.
 sumatur in utraque ip-
 sarum CD CE quævis
 puncta DE, ducaturque
 DE, & ex tribus rectis
 lineis, quæ æquales sint
 tribus CD DE EC trian-
 gulum $\cdot$ constituatur AFG,
 ita ut CD sit æqualis AF, & CE ipsi AG, & DE ipsi FG.
 Itaque quoniam duæ DC CE duabus FA AG æquales sunt,
 altera alteri, & basis DE est æqualis basi FG: erit, & an-
 gulus DCE angulo FAG æqualis $\cdot$. Ad datam igitur rectam $\cdot$ 8. hujus.
 lineam AB, & ad datum in ea punctum A, dato angulo
 rectilineo DCE æqualis angulus rectilineus constitutus est
 FAG. Quod facere oportebat.



422. hujus.

PROP. XXIV. PROBL.

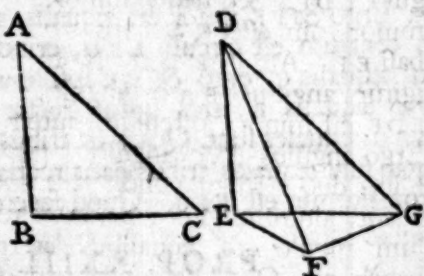
*Si duo triângula duo latera duobus lateribus æqualia ha-
 beant, alterum alteri, angulum autem angulo mayo-
 rem,*

B 2

rem,

rem, qui æqualibus rectis lineis continetur: & basim basi majorem habebunt.

- Sint duo triangula ABC DEF , quæ duo latera AB AC duobus lateribus DE DF æqualia habeant, alterum alteri, videlicet latus quidem AB æquale lateri DE ; latus vero AC æquale DF : At angulus BAC angulo EDF sit major. Dico, & basim BC basi EF majorem esse. quoniam enim angulus BAC major est angulo
23. hujus. EDF , constituatur ad rectam lineam DE ; & ad punctum in ea D , angulo BAC æqualis angulus EDG , ponaturque alterutri ipsarum AC DF æqualis DG , & GE FG jungantur. itaque quoniam AB quidem est æqualis DE , AC vero ipsi DG ; duæ BA AC duabus ED DG æquales sunt, altera alteri; & angulus BAC est æqualis angulo EDG . ergo basis BC basi EG est æqualis. rursus quoniam æqualis est DG ipsi DF ; & angulus DFG angulo DGF æqualis: erit DGF angulus angulo EGF major. multo igitur major est EGF angulus ipso EGF . & quoniam triangulum est EGF , angulum EGF majorem habens angulo EGF ; majori autem angulo latus majus subtenditur; erit, & latus EG latere EF majus. sed EG latus est æquale lateri BC . Ergo, & BC ipso EF majus erit. Si igitur duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri, angulum autem angulo majorem, qui æqualibus rectis lineis continetur: & basim basi majorem habebunt. Quod oportebat demonstrare.



PROP. XXV. THEOR.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri, basim vero basi majorem; & angulum angulo, qui æqualibus lateribus continetur, majorem habebunt.

Sint duo triangula ABC DEF , quæ duo latera AB AC duobus lateribus DE DF æqualia habeant, alterum alteri, videlicet latus AB æquale lateri DE , & latus AC lateri DF : basis autem BC basi EF sit major. Dico, & angulum

BAC

BAC angulo EDF majorem esse. Si enim non est major, vel æqualis est, vel minor. Æqualis autem non est angulus

BAC angulo EDF: esset enim, & basis BC basi EF æqualis.

Non est autem. Non igitur æqualis est BAC angulus an-

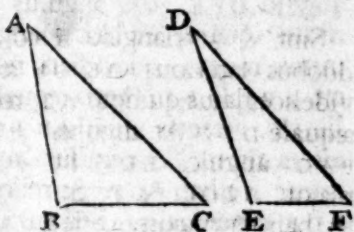
gulo EDF. Sed neque minor. minor enim esset, & basis BC

basi EF. Atqui non est. Non igitur angulus BAC angulo

EDF est minor. ostensum autem est neque esse æqualem.

Ergo angulus BAC angulo EDF necessario major erit. Si igitur duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia ha-

bent, alterum alteri, basim vero basi majorem; & angulum angulo qui æqualibus lateribus continetur, majorem habebunt. Quod demonstrare oportebat.



PROP. XXVI. THEOR.

Si duo triangula duos angulos duobus angulis æquales habeant, alterum alteri, unumque latus uni lateri æquale, vel quod æqualibus adjacet angulis, vel quod uni æqualium angulorum subtenditur; & reliqua latera reliquis lateribus æqualia, alterum alteri, & reliquum angulum reliquo angulo æqualem habebunt.

Sint duo triangula ABC DEF, quæ duos angulos ABC BCA duobus angulis DEF EFD æquales habeant, alterum alteri, videlicet angulum quidem ABC æqualem angulo DEF; angulum vero BCA angulo EFD. Habeant autem,

& unum latus uni lateri æquale, & primo quod æqualibus

adjacet angulis; nempe latus BC lateri EF. Dico, & reli-

qua latera reliquis lateribus æqualia habere, alterum alteri,

latus. scilicet AB lateri DE; & la-

tus AC ipsi DF, & reliquum

angulum BAC reliquo angulo EDF æqualem. Si enim in-

æqualis est AB ipsi DE, una ipsarum major est. Sit major

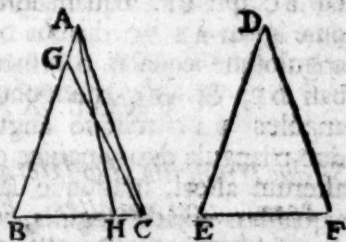
AB, ponaturque GB æqualis DE; & GC jungatur. Quo-

nam igitur BG quidem est æqualis DE, BC vero ipsi EF,

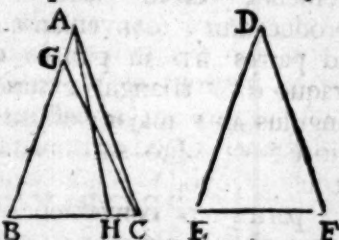
duæ GB BC duabus DE EF æquales sunt, altera alteri: &

angulus GBC æqualis angulo DEF. basis igitur GC basi

DF est æqualis: & GBC triangulum triangulo DEF, & re-



liqui anguli reliquis angulis æquales, alter alteri, quibus æqualia latera subtenduntur. ergo $\angle GCB$ angulus est æqualis angulo $\angle DFE$. sed angulus $\angle DFE$ angulo $\angle BCA$ æqualis ponitur. quare, & $\angle BCG$ angulus angulo $\angle BCA$ est æqualis, minor majori, quod fieri non potest. non igitur inæqualis est AB ipsi DE . ergo æqualis erit. est autem, & BC æqualis EF . Itaque duæ $ABBC$ duabus $DEEF$ æquales sunt, altera alteri, & angulus $\angle ABC$ æqualis angulo $\angle DEF$. Basis igitur AC basi DF , & reliquus angulus $\angle BAC$ reliquo angulo $\angle EDF$ est æqualis. Sed rursus sint latera, quæ æqualibus angulis subtenduntur æqualia, ut AB ipsi DE . Dico rursus, & reliqua latera reliquis lateribus æqualia esse; AC quidem ipsi DF , BC vero ipsi EF : & ad huc reliquum angulum $\angle BAC$ reliquo angulo $\angle EDF$ æqualem. Si enim inæqualis est BC ipsi EF , una ipsarum major est. Sit major BC , si fieri potest, ponaturque BH æqualis EF , & AH jungatur. Quoniam igitur BH quidem est æqualis EF , AB vero ipsi DE ; duæ $ABBH$ duabus $DEEF$ æquales sunt, altera alteri, & angulos æquales continent. ergo $\angle$ basis AH basi DF est æqualis: & ABH triangulum triangulo DEF & reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt, alter alteri, quibus æqualia latera subtenduntur. Æqualis igitur est angulus $\angle BHA$ angulo $\angle EFD$. sed $\angle EFD$ est æqualis $\angle$ angulo $\angle BCA$. Ergo, & $\angle BHA$ angulus angulo $\angle BCA$ est æqualis. triangulo igitur AHC exterior angulus $\angle BHA$ æqualis est interiori & opposito $\angle BAC$, quod fieri non potest. quare non inæqualis est BC ipsi EF . æqualis igitur. est autem, & AB æqualis DE . duæ igitur $ABBC$ duabus $DEEF$ æquales sunt, altera alteri: angulosque æquales continent. quare basis AC æqualis est basi DF , & ABC triangulum triangulo DEF , & reliquus angulus $\angle BAC$ reliquo angulo $\angle EDF$ est æqualis. Si igitur duo triangula duos angulos duobus angulis æquales habeant, alterum alteri, unumque latus uni lateri æquale, vel quod æqualibus adjacet angulis, vel quod uni æqualium angulorum subtenditur; & reliqua latera reliquis lateribus æqualia, alterum alteri, & reliquum angulum reliquo angulo æqualem habebunt, Quod oportebat demonstrare.

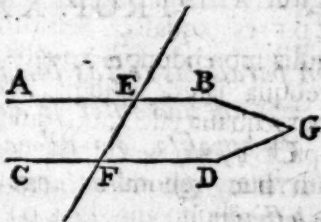


PROP.

PROP. XXVII. THEOR.

Si in duas rectas lineas recta linea incidens alternos angulos inter se æquales fecerit, parallelæ erunt rectæ lineæ.

In duas enim rectas lineas $ABCD$, recta linea EF incidens alternos angulos AEF EFD æquales inter se faciat. dico rectam lineam AB ipsi CD parallelam esse. Si enim non est parallela, productæ $ABCD$, vel ad partes BD convenient, vel ad partes AC producantur, convenientque ad partes BD in puncto G . itaque GEF trianguli exterior angulus AEF major ^a est interiore & opposito EFG . sed & æqualis ^b, quod fieri non potest. non igitur $ABCD$ productæ ad partes BD convenient. similiter demonstrabitur neque convenire ad partes AC . quæ vero in neutra partes conveniunt, parallelæ ^c inter se sunt. parallela igitur est AB ipsi CD . Quare si in duas rectas lineas recta linea incidens alternos angulos inter se æquales fecerit, parallelæ inter se erunt rectæ lineæ, quod ostendere oportebat.



^a 16. hujus.

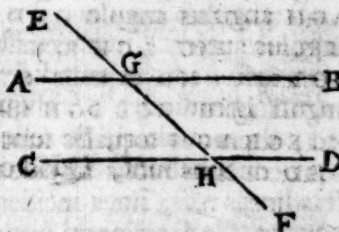
^b ex hyp.

^c Diffin. 35.

PROP. XXVIII. THEOR.

Si in duas rectas lineas recta linea incidens exteriorem angulum interiori, & opposito, & ad easdem partes æqualem fecerit, vel interiores, & ad easdem partes duobus rectis æquales; parallelæ erunt inter se rectæ lineæ.

In duas enim rectas lineas $ABCD$ recta linea EF incidens exteriorem angulum EGB interiori, & opposito GHD æqualem faciat; vel interiores, & ad easdem partes BGH GHD , duobus rectis æquales. dico rectam lineam AB rectæ CD parallelam esse. Quoniam enim EGB angulus æqualis est ^a angulo GHD , angulus autem EGB angulo AGH ^b, erit & angulus AGH angulo GHD æqualis; & sunt alterni. parallela igitur est AB ipsi CD . rursus quoniam anguli BGH GHD duobus rectis sunt æquales ^c, & sunt AGH BGH æquales ^d.



^a Ex hyp.

^b 15. hujus.

^c Ex antecedente.

B 4

quales

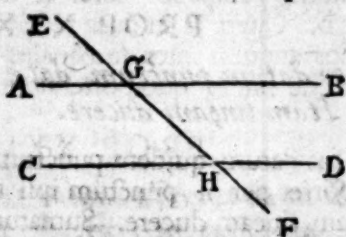
413. hujus quales duobus rectis d : erunt anguli AGH BGH angulis BGH GHD æquales. communis auferatur BGH . reliquus igitur AGH est æqualis reliquo GHD : & sunt alterni. ergo AB ipsi CD parallela erit. Si igitur in duas rectas lineas recta linea incidens exteriorem angulum interiori, & opposito, & ad easdem partes æqualem fecerit, vel interiores, & ad easdem partes duobus rectis æquales; parallelae erunt inter se rectae lineae. Quod demonstrare oportebat.

PROP. XXIX. THEOR.

In parallelas rectas lineas recta linea incidens, & alternos angulos inter se æquales, & exteriorem interiori, & opposito, & ad easdem partes æqualem, & interiores, & ad easdem partes duobus rectis æquales efficiet.

In parallelas enim rectas lineas AB CD recta linea incidat EF . dico alternos angulos AGH GHD inter se æquales efficere, & exteriorem EGB interiori, & ad easdem partes

GHD æqualem: & interiores, & ad easdem partes BGH GHD duobus rectis æquales. si enim inæqualis est AGH ipsi GHD , unus ipsorum major est. sit major AGH . & quoniam AGH angulus major est angulo GHD ; communis apponatur BGH . anguli igitur AGH BGH angulis BGH GHD majores sunt.



sed anguli AGH BGH sunt æquales duobus rectis a . ergo BGH GHD anguli sunt duobus rectis minores. quæ vero à minoribus, quam sint duo recti in infinitum producantur

6 Axiom. 12 rectae lineae inter se conveniunt b . ergo rectae lineae AB CD in infinitum productae convenient inter se. atqui non conveniunt cum parallelae ponantur. non igitur inæqualis est AGH angulus angulo GHD . quare necessario est æqualis.

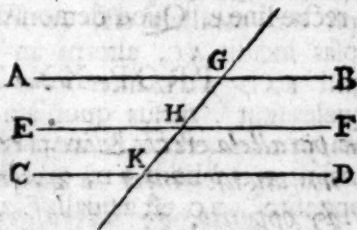
15. hujus. angulus autem AGH æqualis est angulo EGB c . ergo, & EGB ipsi GHD æqualis erit. communis apponatur BGH . anguli igitur EGB BGH sunt æquales angulis BGH GHD . sed EGB BGH æquales sunt duobus rectis. Ergo, & BGH GHD duobus rectis æquales erunt. In parallelas igitur rectas lineas recta linea incidens, & alternos angulos inter se æquales, & exteriorem interiori, & opposito, & ad easdem partes æqualem; & interiores, & ad easdem partes duobus rectis æquales efficiet. Quod oportebat demonstrare.

PROP.

PROP. XXX. THEOR.

Quæ eidem rectæ lineæ sunt parallelæ, & inter se parallelæ erunt.

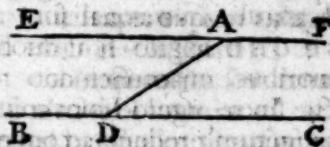
Sit utraque ipsarum $ABCD$ ipsi EF parallelæ. dico & AB ipsi CD parallelam esse. Incidat enim in ipsas recta linea GK . & quoniam in parallelas rectas lineas $ABEF$, recta linea GK incidit, angulus AGH angulo GHF est æqualis ^a. rursus quoniam in parallelas rectas lineas $EFGD$, recta linea incidit GK , æqualis est GHF angulus angulo GKD ^a. ostensus autem est, & angulus AGK angulo GHF æqualis. ergo, & AGK ipsi GKD æqualis erit. & sunt alterni. parallela igitur est AB ipsi CD ^b. ergo quæ eidem ^c 17. hujus. rectæ lineæ sunt parallelæ, & inter se parallelæ erunt. Quod oportebat demonstrare.



PROP. XXXI. PROBL.

Per datum punctum datæ rectæ lineæ parallelam rectam lineam ducere.

Sit datum quidem punctum A , data vero recta linea BC oportet per A punctum ipsi BC rectæ lineæ parallelam rectam lineam ducere. Sumatur in BC quodvis punctum D , & jungatur AD : constituaturque ^a ad rectam lineam DA , & ad punctum in ipsa A , angulo ADC æqualis angulus DAE : & in directum ipsi EA recta linea AF producat. quoniam igitur in duas rectas lineas BC EF recta linea AD incidens alternos angulos EAD ADC inter se æquales efficit, EF ipsi BC parallelæ erit ^b. per datum igitur punctum A datæ rectæ ^c 17. hujus. lineæ BC parallelæ ducta est recta linea EAF . quod facere oportebat.



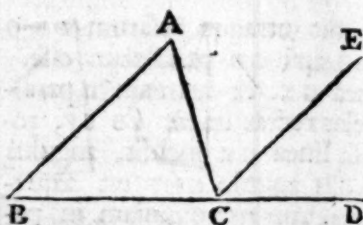
PROP. XXXII. THEOR.

Omnis trianguli uno latere producto exterior angulus duobus interioribus, & oppositis est æqualis, & trianguli tres interiores anguli duobus rectis æquales sunt.

Sit

Sit triangulum ABC : & unum ipsius latus BC in D producat. dico angulum exteriorem ACD duobus interioribus, & oppositis CAB ABC æqualem esse; & trianguli tres interiores angulos ABC BCA CAB duobus rectis esse æqua-

les. ducatur enim per punctum C ipsi AB rectæ lineæ parallela CE . & quoniam AB ipsi CE parallela est, & in ipsas incidit AC , alterni anguli BAC ACE inter se æquales sunt ^b. rursus quoniam AB parallela est CE & in ipsas



incidit recta linea BD , exterior angulus ECD interiori, & opposito ABC est æqualis ^b. ostensus autem est angulus ACE æqualis angulo BAC . quare totus ACD exterior angulus æqualis est duobus interioribus, & oppositis BAC ABC . communis apponatur ACB . anguli igitur ACD ACB tribus ABC BAC ACB æquales sunt. sed anguli ACD ACB sunt æquales ^c duobus rectis. ergo & ACB CBA CAB duobus rectis æquales erunt. Omnis igitur trianguli uno latere producto exterior angulus duobus interioribus, & oppositis est æqualis; & trianguli tres interiores anguli duobus rectis æquales sunt. Quod demonstrare oportebat.

COROLLARIA.

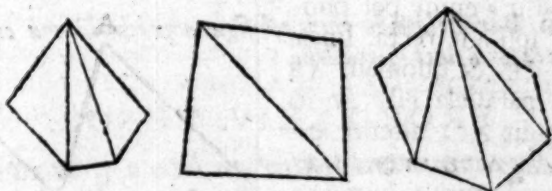
1. Omnes tres anguli cujusque trianguli simul sumpti æquales sunt tribus angulis cujusque alterius trianguli simul sumptis.
2. Si in uno triangulo duo anguli aut singuli aut simul æquales sunt duobus angulis alterius trianguli erit reliquus angulus reliquo æqualis.
3. In triangulo si unus angulus rectus sit, reliqui simul unum rectum conficiunt.
4. In triangulo Isoscele si angulus æquis cruribus contentus rectus sit reliqui ad basim sunt semirecti.
5. In triangulo æquilatelo angulus quilibet æqualis est $\frac{1}{3}$ duorum rectorum vel $\frac{2}{3}$ unius recti.

THEOREMA I.

Omnes simul interiores anguli cujusunque figure rectilineæ conficiunt bis tot rectos demptis quatuor quot sunt latera figura.

Nam figura una quæque rectilinea resolvi potest in triangula binario pauciora quam sunt ipsius figura latera, V. G. si quatuor latera habet resolvitur in duo triangula si quinque in tria

tria triangula si sex in quatuor & sis deinceps; quare per præcedentem omnes horum triangulorum anguli æquantur bis tot rectis quot sunt triangula, sed omnes horum triangulorum



anguli æquales sunt angulis figuræ interioribus; quare omnes anguli interiores figuræ æquales sunt bis tot rectis quot sunt triangula, hoc est bis tot rectis demptis quatuor quot sunt latera figuræ. Q. E. D.

THEOR. II.

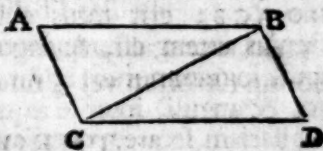
Omnes simul exteriores anguli cujusque figuræ rectilineæ conficiunt quatuor rectos.

Nam exteriores simul cum interioribus conficiunt, bis tot rectos quot sunt latera figuræ; vero ex præcedente Theor. omnes interiores soli conficiunt, bis tot rectos demptis quatuor quot sunt latera figuræ quare exteriores conficiunt quatuor rectos. Q. E. D.

PROP. XXXIII. THEOR.

Quæ æquales, & parallelas ad easdem partes conjungunt rectæ lineæ, & ipsæ æquales, & parallelæ sunt.

Sint æquales, & parallelæ $ABCD$: & ipsas conjungant ad easdem partes rectæ lineæ $ACBD$. dico $ACBD$ æquales, & parallelas esse. ducatur enim BC . & quoniam AB parallela est CD : in ipsasque incidit BC . alterni anguli ABC BCD æquales sunt Δ . rursus quoniam AB est æqualis CD , communis autem BC , duæ AB BC duabus BC CD sunt æquales; & angulus ABC æqualis angulo BCD . basis igitur AC



29. hujus.

basi BD est æqualis b : triangulumque ABC triangulo BCD : $b4$. hujus. & reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt, alter alteri, quibus æqualia latera subtenduntur. ergo angulus ACB angulo CBD est æqualis. & quoniam in duas rectas lineas AC BD recta linea BC incidens, alternos angulos ACB CBD æquales

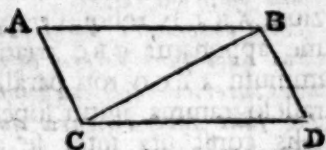
c 27. hujus. les inter se efficiet, parallela est AC ipsi BD. Otenfa autem est & ipsi æqualis. Quæ igitur æquales, & parallelas ad easdem partes conjungunt rectæ lineæ, & ipsæ æquales, & parallelae sunt. Quod oportebat demonstrare.

Diffin. *Parallelogrammum est figura quadrilatera cujus bina opposita latera sunt parallela.*

PROP. XXXIV. THEOR.

Parallelogrammorum spatiorum latera, quæ ex opposito, & anguli, inter se æqualia sunt; & diameter ea bifariam secat.

Sit parallelogrammum ABDC, cujus diameter BC. dico ACDB parallelogrammi latera, quæ ex opposito, & angulos inter se æqualia esse; & diametrum BC ipsum bifariam secare. Quoniam enim parallela est AB ipsi CD, & in ipsas incidit recta linea BC; anguli alterni ABC BCD inter se æquales sunt a. rursus quoniam AC ipsi BD parallela est, & in ipsas incidit BC; alterni anguli ACB CBD æquales sunt inter se a. duo igitur triangula sunt ABC CBD, quæ duos angulos ABC BCA duobus angulis BCD CBD æquales habent, alterum alteri: & unum latus uni lateri æquale, scil. quod est ad æquales angulos, utrique commune BC. ergo, b & reliqua latera reliquis lateribus æqualia habebunt alterum alteri, & reliquum angulum reliquo angulo æqualem. æquale igitur est latus quidem AB lateri CD: latus vero AC ipsi BD, & angulus BAC angulo BDC æqualis. & quoniam angulus ABC est æqualis angulo BCD; & angulus CBD angulo ACB; erit totus angulus ABD æqualis toti ACD. ostensus autem est, & angulus BAC angulo BDC æqualis. parallelogrammorum igitur spatiorum latera, quæ ex opposito, & anguli, inter se æqualia sunt. dico etiam diametrum ea bifariam secare. quoniam enim æqualis est AB ipsi CD communis autem BC. duæ AB BC duabus DC CB æquales sunt, altera alteri & angulus ABC æqualis est angulo BCD. basis igitur AC basi DB æqualis. quare, & triangulum ABC triangulo BCD æquale erit. ergo diameter BC parallelogrammum ACDB bifariam secat. Quod oportebat demonstrare.

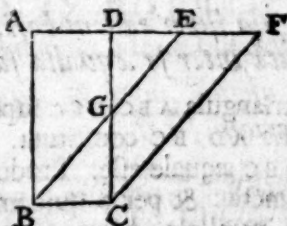


PROP.

PROP. XXXV. THEOR.

Parallelogramma super eadem basi, & in eisdem parallelis constituta, inter se æqualia sunt.

Sint parallelogramma $ABCD$ $EBCF$ super eadem basi BC , & in eisdem parallelis AF BC constituta. dico $ABCD$ parallelogrammo $EBCF$ æquale esse. Quoniam enim paralle-



34. hujus.

b Axiom. 1.
c Axiom. 2.

logrammum est $ABCD$, æqualis a est AD ipsi BC . eadem quoque ratione, & EF est æqualis BC . quare &, AD ipsi EF æqualis erit b : & communis DE . tota igitur AE c toti DF est æqualis. est autem, & AB æqualis DC . ergo duæ EA AB duabus FD DC æquales sunt, altera alteri, & angulus FDC æqualis angulo EAB , exterior interiori d , basis igitur EB basi FC est æqualis, & EAB triangulum æquale triangulo FDC . commune auferatur DGE . reliquum igitur trapezium $ABGD$ reliquo trapezio $EGCF$ est æquale f . commune apponatur GBC triangulum. ergo totum parallelogrammum $ABCD$ toti parallelogrammo $EBCF$ æquale erit. Parallelogramma igitur super eadem basi, & in eisdem parallelis constituta inter se æqualia sunt. Quod oportebat demonstrare.

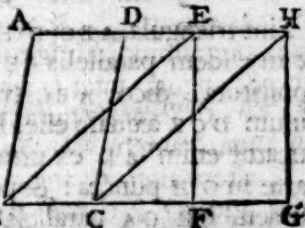
d 39. hujus.
e 4. hujus.

Axiom. 3.

PROP. XXXVI. THEOR.

Parallelogramma super æqualibus basibus, & in eisdem parallelis constituta inter se æqualia sunt.

Sint parallelogramma $ABCD$ $EFGH$ super æqualibus basibus BC FG , & in eisdem parallelis AH BC constituta. dico parallelogrammum $ABCD$ parallelogrammo $EFGH$ æquale esse. Coniungantur enim



Hyp.

BE CH . & quoniam æqualis a est BC ipsi FG & FG æqualis ipsi EH ; erit & BC ipsi EH æqualis. suntque parallelæ, & ipsas coniungunt BE CH . quæ autem æquales, & parallelæ ad easdem partes coniungunt, æquales, & parallelæ sunt b . ergo EB , CH & æquales sunt, & parallelæ: quare $EBCH$ parallelogrammum est, & æquale parallelogrammo $ABCD$; basim enim eandem habet BC , &

33. hujus.

35. hujus.

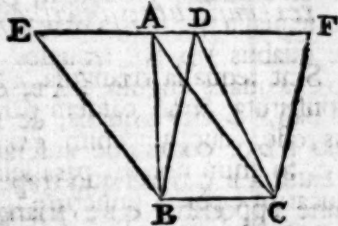
&

& in eisdem parallelis BC , AD constituitur. simili ratione, & $EFGH$ parallelogrammum eidem parallelogrammo $EBCH$ est æquale. ergo parallelogrammum $ABCD$ parallelogrammo $EFGH$ æquale erit. Parallelogramma igitur super æqualibus basibus, & in eisdem parallelis constituta inter se sunt æqualia. Quod oportebat demonstrare.

PROP. XXXVII. THEOR.

Triangula super eadem basi, & in eisdem parallelis constituta inter se æqualia sunt.

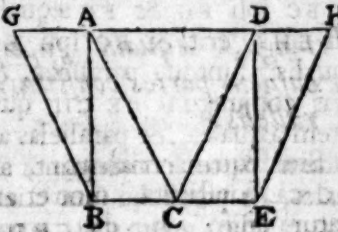
Sint triangula ABC DBC super eadem basi BC , & in eisdem parallelis AD BC constituta. dico ABC triangulum triangulo DBC æquale esse. Producat AD ex utraque parte in E F puncta: & per B quidem ipsi CA parallela ducatur BE ,
 31. hujus. a per C vero ipsi BD parallela CF parallelogrammum igitur est utrumque ipsorum $EBCA$ $DBC F$, & parallelogrammum $EBCA$ est æquale parallelogrammo $DBC F$, etenim super eadem sunt basi BC , & in eisdem parallelis BC EF , estque parallelogrammi quidem $EBCA$ dimidium ABC triangulum, cum diameter AB ipsum bifariam secet: parallelogrammi vero $DBC F$ dimidium DBC triangulum; diameter enim
 34. hujus. DC ipsum bifariam secat. quæ autem æqualium dimidia inter se æqualia sunt. ergo triangulum ABC triangulo DBC est æquale. Triangula igitur super eadem basi, & in eisdem parallelis constituta inter se æqualia sunt. Quod oportebat demonstrare.



PROP. XXXVIII. THEOR.

Triangula super basibus, æqualibus, & in eisdem parallelis constituta inter se sunt æqualia.

Sint triangula ABC DCE super æqualibus basibus, BC CE , & in eisdem parallelis BE AD constituta. dico ABC triangulum DCE æquale esse. Producat AD ex utraque parte in G H puncta: & per B quidem ipsi CA parallela ducatur BG ,
 31. hujus. a per E vero ducatur EH parallela ipsi DC . parallelogrammum igitur est utrumque ipsorum $GBCA$ $DCEH$.
 atque

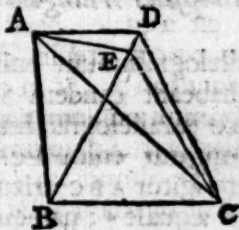


atque est parallelogrammum $GBCA$ æquale δ parallelogrammo $DCEH$: in æqualibus enim sunt basibus BC CE , & in eisdem BE GH parallelis. parallelogrammi vero $GBCA$ dimidium ϵ est ABC triangulum, nam diameter AB ipsum ϵ 34. hujus. bifariam secat. & parallelogrammi $DCEH$ dimidium ϵ est triangulum DCE , diameter enim DE ipsum secat bifariam. quæ autem æqualium dimidia δ , inter se æqualia sunt. ergo δ Axiom. 7. ABC triangulum triangulo DCE est æquale. Triangula igitur super æqualibus basibus, & in eisdem parallelis constituta, inter se sunt æqualia. Quod demonstrare oportebat.

PROP. XXXIX. THEOR.

Triangula æqualia super eadem basi, & ad easdem partes constituta, in eisdem quoque sunt parallelis.

Sint æqualia triangula ABC DBC super eadem basi BC constituta, & ad easdem partes. dico, & in eisdem parallelis esse. ducatur enim AD . dico AD parallelam esse ipsi BC . Si enim non est parallela, ducatur α per A punctum ipsi BC parallela recta linea AE , & EC ducatur. æquale igitur est ABC triangulum triangulo EBC δ , super eadem enim est basi BC , & in eisdem BC , AE parallelis. sed ABC triangulum triangulo DBC ϵ est æquale. ergo & triangulum DBC æquale est ipsi EBC triangulo, majus minori, quod fieri non potest. non igitur AE ipsi BC parallela est. similiter ostendimus neque aliam quampiam parallelam esse, præter ipsam AD . ergo AD ipsi est parallela. Triangula igitur æqualia super eadem basi, & ad easdem partes constituta in eisdem quoque sunt parallelis. Quod oportebat demonstrare.



δ 31. hujus.

δ 37. hujus.

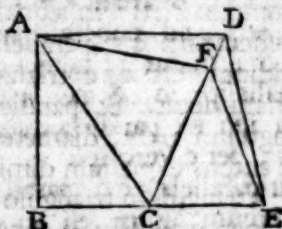
ϵ Ex hyp.

PROP. XL. THEOR.

Triangula æqualia super basibus æqualibus, & ad easdem partes constituta in eisdem quoque sunt parallelis.

Sint æqualia triangula ABC CDE super æqualibus basibus BC CE constituta. dico etiam in eisdem esse parallelis. ducatur enim AD . dico AD ipsi BE parallelam esse. Nam si non est, ducatur per A ipsi BE parallela AF , & FE ducatur.

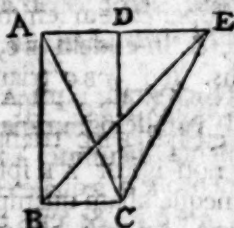
38. hujus. catur. triangulum igitur ABC triangulo FCE est æquale ⁶, cum super æqualibus basibus, & in eisdem parallelis BE & AF constituentur. sed triangulum ABC æquale est triangulo DCE . ergo & triangulum DCE triangulo FCE æquale erit, majus minori, quod fieri non potest. non igitur AF ipsi BE est parallela. similiter demonstrabimus neque aliam quampiam parallelam esse, præter AD . ergo AD ipsi BE parallela erit. Aequalia igitur triangula super basibus æqualibus, & ad eandem partes constituta, etiam in eisdem sunt parallelis. Quod demonstrare oportebat.



PROP. XLI. THEOR.

Si parallelogrammum, & triangulum eandem basim habeant in eisdemque sint parallelis; parallelogrammum ipsius trianguli duplum erit.

Parallelogrammum enim $ABCD$, & triangulum EBC , basim habeant eandem BC , & in eisdem sint parallelis BC & AE . dico parallelogrammum $ABCD$ trianguli EBC duplum esse. Jungatur enim AC : triangulum igitur ABC triangulo EBC est æquale ⁴; namque super eadem basi BC , & in eisdem BC & AE parallelis constituentur. sed $ABCD$ parallelogrammum duplum est trianguli ABC ⁶, cum diameter AC ipsum bifariam fecet. quare & ipsius EBC trianguli duplum erit. Si igitur parallelogrammum, & triangulum eandem basim habeant, & in eisdem sint parallelis; duplum erit parallelogrammum ipsius trianguli. Quod demonstrare oportebat.

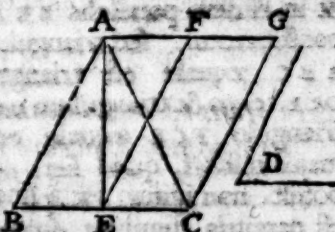


PROP. XLII. PROBL.

Dato triangulo æquale parallelogrammum constituere in dato angulo rectilineo.

Sit datum triangulum ABC , datus autem rectilineus angulus D . Itaque oportet, dato triangulo ABC æquale parallelogrammum constituere in angulo rectilineo ipsi D æquali. secetur

secetur BC bifariam in E, & juncta AE, ad rectam lineam EC, atque ad punctum in ea E, constituatur angulus CEF æqualis ipsi D: & per A quidem ipsi EC parallela ducatur AG; per C vero ipsi FE ducatur parallela CG. parallelogrammum igitur est FECC.



623 hujus.

631 hujus.

& quoniam BE est æqualis EC, erit & ABE triangulum æquale super æqualibus enim sunt basibus BE EC, & in eisdem BC AG parallelis. ergo triangulum ABC æquale est duplum. est autem, & parallelogrammum FECC duplum æquali AEC; basim enim eandem habet, & in eisdem est parallelis. æquale igitur est FECC parallelogrammum triangulo ABC habetque CEF angulum æqualem angulo D dato. Dato igitur triangulo ABC æquale parallelogrammum FECC constitutum est, in angulo CEF, qui angulo D est æqualis. Quod quidem facere oportebat.

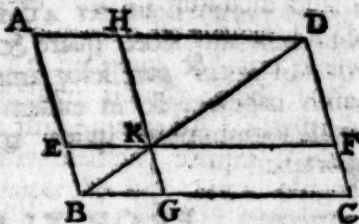
638 hujus.

635 hujus.

PROP. XLIII. THEOR.

Omnis parallelogrammi spatii eorum, quæ circa diametrum sunt, parallelogrammorum complementa inter se sunt æqualia.

Sit parallelogrammum ABCD, cujus diameter BD, & circa ipsam BD parallelogramma quidem sint FH EG, quæ verò complementa dicuntur AK KC. dico AK complementum complemento KC æquale esse. Quoniam enim parallelogrammum est ABCD, & ejus diameter BD, æquale est ABD



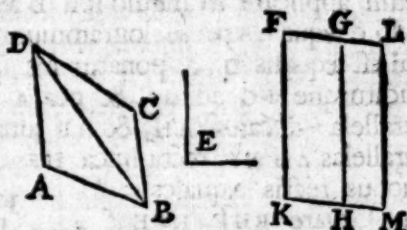
634 hujus.

triangulum triangulo BDC. rursus quoniam HKFD parallelogrammum est cujus diameter DK, triangulum HDK triangulo DFK æquale erit. eadem ratione, & triangulum KGB triangulo KEB est æquale. cum igitur triangulum quidem BEK æquale sit triangulo BGK triangulum vero HDK ipsi DFK; erit triangulum BEK una cum triangulo HDK æquale triangulo BGK una cum DFK triangulo. est autem, & totum triangulum ABD æquale toti BDC. reliquum igitur AK complementum reliquo complemento KC est æquale. Ergo omnis parallelogrammi spatii eorum, quæ circa

C

circa

grammum constituere in angulo ipsi E æquali. Coniungantur enim DB, & constituitur triangulo ADB æquale ^{42. huius.} parallelogrammum FH: in angulo HKF, qui est æqualis angulo E, deinde ad rectam lineam GH applicetur triangulo DBC æquale ^{44. huius.} parallelogrammum GM, in angulo GHM qui angulo E est æqualis. & quoniam angulus E æqualis est utrique ipsorum HKF GHM, erit & HKF angulo GHM æqualis. communis apponatur KHG. anguli igitur FKH KHG angulis KHG GHM æquales sunt. sed FKH KHG sunt æquales ^{19. huius.} duobus rectis. ergo,



& KHG GHM duobus rectis æquales erunt. itaque ad aliquam rectam lineam GH, & ad datum in ea punctum H duæ rectæ lineæ KH HM non ad easdem partes positæ angulos deinceps duobus rectis æquales efficiunt. in directum igitur ⁴ est KH ipsi HM. & quoniam in paral- ^{14. huius.} lelas KM FG recta linea HG incidit, alterni anguli MHG HGF æquales ⁵ sunt. communis apponatur HGL. anguli igitur MHG HGL, angulis HGF HGL sunt æquales. at anguli MHG HGL æquales ⁶ sunt duobus rectis. quare & anguli HGF HGL duobus rectis æquales erunt. in directum igitur est FG ipsi GL. & quoniam KF ipsi HG & æqualis est, & parallela; sed & HG ipsi ML; erit KF ⁷ ipsi ML, ^{30. huius.} & æqualis, & parallela. ipsasque coniungunt rectæ lineæ KM FL. ergo & KM FL æquales ⁸ & parallelæ sunt. paral- ^{33. huius.} lelogrammum igitur est KFLM. at cum triangulum quidem ABD æquale sit parallelogrammo HF: triangulum vero DBC parallelogrammo GM; erit totum ABCD rectilineum toti parallelogrammo KFLM æquale. Dato igitur rectilineo ABCD æquale parallelogrammum constitutum est KFLM in angulo FKM, qui est æqualis angulo E dato. Quod facere oportebat.

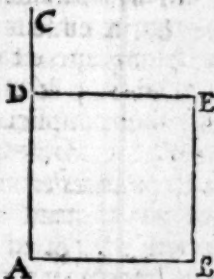
Cor. Ex jam dictis manifestum est, quomodo ad datam rectam lineam, dato rectilineo æquale parallelogrammum applicari possit in dato angulo rectilineo.

PROP. XLVI. PROBL.

Super data recta linea quadratum describere.

Sit data recta linea AB. oportet super ipsa AB quadratum descri-

41. hujus. describere. Ducatur rectæ lineæ AB à puncto in ea dato
 3. hujus. A ad rectos angulos AC; & ipsi AB æqualis ponatur AD;
 perque punctum D ducatur DE ipsi AB parallela, & per B
 31. hujus. ipsi AD parallela ducatur BE. parallelogrammum igitur est
 ADEB. & AB quidem est æqualis DE,
 34. hujus. AD vero ipsi BE. sed & BA ipsi AD est
 æqualis. quatuor igitur BA AD DE EB in-
 ter se æquales sunt, ideoque æquilaterum
 est ADEB parallelogrammum. dico et-
 iam rectangulum esse. quoniam enim in
 29. hujus. parallelas AB DE recta linea incidit AD,
 anguli BAD ADE duobus rectis sunt æ-
 quales. rectus autem est BAD, ergo, &
 ADE rectus erit. parallelogrammorum
 vero spatiorum, quæ ex opposito sunt la-
 34. hujus. tera, & angulis inter se æqualia sunt. re-
 ctus igitur est uterque oppositorum ABE BED angulorum:
 & ob id rectangulum est ADBE. Oñsum autem est æ-
 quilaterum esse. Quadratum igitur fit necesse est, atque est
 super recta linea AB descriptum. Quod ipsum facere oportebat.

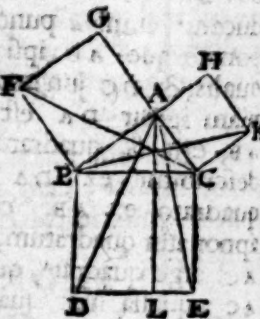


Cor. Hinc omne parallelogrammum habens unum angulum rectum est rectangulum.

PROP. XLVII. THEOR.

In rectangulis triangulis, quod à latere rectum angulum subtendente describitur quadratum æquale est quadratis, quæ à lateribus rectum angulum continentibus describuntur.

- Sit triangulum rectangulum ABC, rectum habens BAC angulum. dico quadratum descriptum à recta BC æquale esse quadratis, quæ ab ipsis BA AC describuntur. describatur enim à BE quidem quadratum BDEC, ab ipsis
 46. hujus. BA AC quadrata OBHC, perque A alterutri ipsarum BD CE parallela ducatur AL; & AD FC jungantur. Quoniam igitur uterque angulorum BAC
 Diffin. 30. BAG rectus est, ad aliquam rectam lineam BA, & ad datum in ea punctum A duæ rectæ lineæ AC AG non ad easdem partes positæ, angulos qui deinceps sunt duobus rectis æquales efficiunt. in directum igitur est CA ipsi AG. eadem ratione, & AB ipsi AH est in directum. & quoniam angulus



DBC est æqualis angulo FBA, rectus enim uterque est, communis apponatur ABC totus igitur DBA angulus toti FBC est æqualis. quod cum duæ AB BD duabus FB BC æquales sint, altera alteri, & angulus DBA æqualis angulo FBC; erit & basis AD basi FC æqualis, & ABD triangulum triangulo FBC æquale. estque trianguli quidem ABD duplum BL parallelogrammum, basim enim eandem habent BD & in eisdem BD AL sunt parallelis: trianguli vero FBC duplum est GB quadratum; rursus enim basim habent eandem FB, & in eisdem sunt parallelis FB GC. quæ autem æqualium duplicia inter se æqualia sunt. ergo æquale est parallelogrammum BL ipsi GB quadrato. similiter junctis AE BK, ostendetur etiam CL parallelogrammum æquale quadrato HC. totum igitur DBEC quadratum duobus quadratis GB HC est æquale. & describitur quidem DBEC quadratum à recta linea BC, quadrata vero GB HC ab ipsis BA AC. quadratum igitur BE, à latere BC descriptum æquale est quadratis, quæ describuntur à lateribus BA AC. Ergo in rectangulis triangulis, quadratum, quod describitur à latere rectum angulum subtendente æquale est quadratis, quæ à lateribus rectum angulum continentibus describuntur. Quod oportebat demonstrare.

PROP. XLVIII. THEOR.

Si quadratum, quod describitur ab uno laterum trianguli æquale sit quadratis, quæ à reliquis trianguli lateribus describuntur; angulus reliquis duobus trianguli lateribus contentus rectus erit.

Si trianguli ABC, quod ab uno latere BC describitur quadratum æquale sit quadratis, quæ à reliquis trianguli lateribus BA AC describuntur, dico angulum BAC rectum esse. ducatur enim à puncto A ipsi AC ad rectos angulos AD; ponaturque AD ipsi BA æqualis, & DC jungatur. Quoniam igitur DA est æqualis AB, erit & quadratum quod describitur ex DA æquale quadrato ex AB. commune apponatur quadratum, quod ex AC. ergo quadrata, quæ ex DA AC æqualia sunt quadratis quæ ex BA AC describuntur. sed quadratis quidem, quæ ex DA AC æquale est, quod ex DC quadratum; rectus enim angulus est DAC: quadratis



ulorum:
em est æ-
atque est
portebat.
um angu-

m angu-
uale est
m conti-

S BAC an-
quale esse

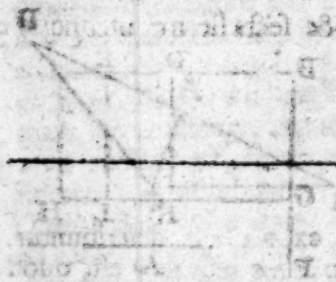
H
K
C
L E
eadem ra-
m angulus
DBC

C3

dratis vero, quæ ex BA AC æquale ponitur quadratum, quod ex BC quadratum igitur, quod ex DC æquale est ei, quod ex BC quadrato. ergo & latus DC lateri CB est æquale. & quoniam DA est æqualis AB communis autem AC , duæ DA AC æquales sunt duabus BA AC ; & basis DC est æqualis basi CB . angulus igitur DAC angulo BAC est æqualis. rectus autem est DAC . ergo & BAC rectus erit. Si igitur quadratum quod describitur ab uno laterum trianguli, æquale sit quadratis quæ à reliquis trianguli lateribus describuntur, angulus reliquis duobus trianguli lateribus contentus rectus erit. Quod oportebat demonstrare.

68. hujus.

EUCLIDIS



EUCLIDIS

ELEMENTORUM.

LIBER SECUNDUS.

DIFFINITIONES.

I.

Omnis parallelogrammum rectangulum contineri dicitur sub duabus rectis lineis, quæ rectum angulum comprehendunt.

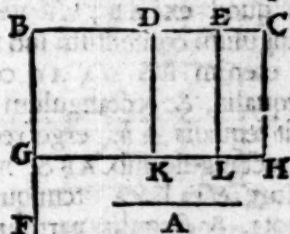
II.

Omnis parallelogrammi spatij, unum quodvis eorum quæ circa diametrum ipsius sunt parallelogrammorum, cum duobus complementis gnomon vocetur.

PROPOSITIO I. THEOREMA.

Si sint duæ rectæ lineæ, altera autem ipsarum secta fuerit in quotcunque partes; rectangulum sub duabus rectis lineis contentum æquale est eis rectangulis quæ sub recta linea infecta, & singulis partibus continentur.

Sint duæ rectæ lineæ $A BC$; & secta sit BC utcumque in punctis $D E$. dico rectangulum rectis lineis $A BC$ contentum æquale esse rectangulo quod continetur sub A & BD , & rectangulo quod sub A & DE , & ei quod sub A & EC continetur. Ducatur enim à puncto B ipsi BC ad rectos α angulos BF : atque ipsi A ponatur β æqualis BG ; & per G

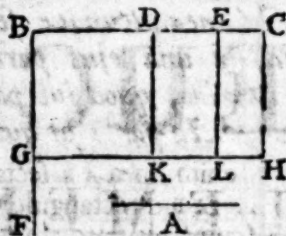


α 1. primi.

β 3. primi.

quidem

31. primi. quidem ipsi BC parallela ducatur GH: per ED C vero ducantur DK EL CH parallele ipsi BG. rectangulum igitur BH est æquale rectangulis BK DL EH: atque est BH quidem, quod sub A & BC continetur; etenim continetur sub GB BC; & BG ipsi A est æqualis; rectangulum autem BK est quod continetur sub ipsis A & BD; continetur enim sub GB BD, quarum GB est æqualis A: & rectangulum DL est quod continetur sub A & DE, quoniam DK, hoc est BG ipsi A est æqualis; & similiter rectangulum EH est quod sub A & EC continetur. ergo rectangulum contentum sub A & BC est æquale rectangulo contento sub A & BD, & contento sub A & DE, & adhuc contento sub A & EC. Si igitur sint duæ rectæ lineæ altera autem ipsarum secta fuerit in quocunque partes; rectangulum sub duabus rectis lineis contentum est æquale eis quæ sub recta linea infecta, & singulis partibus continentur. Quod oportebat demonstrare.



PROP. II. THEOR.

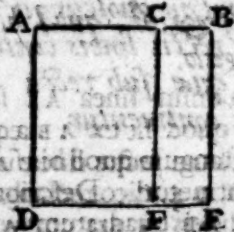
Si recta linea secta fuerit utcumque; rectangula quæ sub tota, & singulis partibus continentur æqualia sunt ei quod à tota fit quadrato.

Recta enim linea AB secta sit utcumque in puncto C, dico rectangulum quod sub AB BC continetur, unà cum contento sub BA AC æquale esse quadrato, quod fit ex AB.

46. primi. describatur enim ex AB quadratum ADEB, & per C du-

31. primi. catur alterutri ipsarum AD

BE parallela CF. æquale igitur est AE rectangulis AF CE. atque est AE quidem quadratum, quod ex AB; AF vero rectangulum contentum sub BA AC; etenim sub DA AC continetur, quoniam AD ipsi AB est æqualis, & rectangulum CE continetur sub AB BC, cum BE sit æqualis AB. ergo rectangulum sub BA & AC unà cum rectangulo sub AB & BC æquale est quadrato ex AB. Si igitur recta linea utcumque secta fuerit, rectangula, quæ sub tota, & singulis partibus continentur, æqualia sunt ei, quod à tota fit quadrato. Quod demonstrare oportebat.

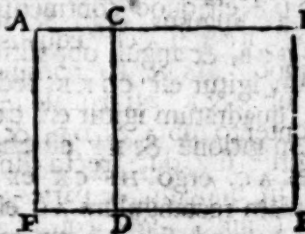


PROP.

PROP. III. THEOR.

Si recta linea utcumque secta fuerit; rectangulum sub tota, & una ejus parte contentum æquale est, & rectangulo, quod sub partibus continetur, & ei quod à prædicta parte fit quadrato.

Recta enim linea AB secta sit utcumque in puncto C . dico sub AB & BC rectangulum æquale esse rectangulo sub AC BC unà cum quadrato, quod fit ex BC . describatur enim ^{46. primi.} ex BC quadratum $CDEB$; producatursue ED in F : & per A alterutri ipsarum $CDEB$ parallela AF . ducatur AF . æquale utique erit rectangulum AE ^{31. primi.} ipsis AD CE : & est AE quidem rectangulum contentum sub AB BC ; etenim sub AB BE continetur, quarum BE est æqualis BC : rectangulum vero AD est quod continetur sub AC CB , cum DC ipsi CB sit æqualis: & DB est quadratum, quod fit ex BC . ergo rectangulum sub AB BC est æquale rectangulo sub AC CB unà cum quadrato quod ex BC . Si igitur recta linea utcumque secta fuerit; rectangulum sub tota, & una ejus parte contentum æquale est rectangulo quod sub partibus continetur, & ei quod à prædicta parte fit quadrato.



PROP. IV. THEOR.

Si recta linea secta fuerit utcumque, quadratum quod fit à tota æquale erit, & quadratis quæ à partibus fiunt, & ei quod bis sub partibus continetur rectangulo.

Recta enim linea AB secta sit utcumque in C . dico quadratum quod fit ex AB æquale esse, & quadratis ex AC CB & ei rectangulo quod bis sub AC CB continetur. Describatur enim ex AB quadratum $ADEB$, jungaturque BD , & per C quidem alterutri ipsarum AD BE parallela CF ducatur CF ; per C vero alterutri ipsarum AB DE ducatur parallela HK . & quoniam CF est parallela ipsi AD , & in ipsas incidit BD : erit exterior angulus BGC interiori & opposito ADB æqualis: ^{29. primi.} angulus

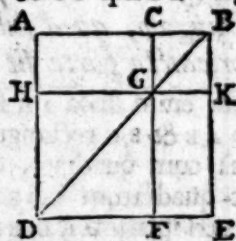


d 5. primi. angulus autem $\angle ADB$ est æqualis $\angle$ angulo $\angle ABD$, quod & latus BA æquale est lateri AD . quare $\angle CGB$ angulus angulo

e 6. primi. $\angle BGC$ est æqualis: ac propterea latus BC lateri CG æquale.

f 34. primi. sed & latus CB æquale f est lateri GK & CG ipsi BK . ergo &

GK est æquale KB , & $CGKB$ æquilaterum est. dico insuper etiam rectangulum esse. quoniam enim CG est parallela ipsi BK & in ipsas incidit CB ; anguli KBC GCB duobus rectis sunt æquales. rectus autem



est KBC angulus. ergo & re-

ctus GCB , & anguli oppositi CGK GKB recti erunt. rectangulum igitur est $CGKB$. sed ostensum fuit & æquilaterum esse. quadratum igitur est $CGKB$, quod quidem fit ex BC . eadem ratione & HF est quadratum quod fit ex HG ; hoc est ex AC . ergo $HFCK$ ex ipsis AC CB quadrata sunt. & quoniam rectangulum AG est æquale rectangulo GE ; atque est AG quod sub AC CB continetur, est enim GC ipsi CB æqualis: erit & GE æquale ei quod continetur sub AC CB , quare rectangula AG GE æqualia sunt ei quod bis sub AC CB continetur. sunt autem & $HFCK$ quadrata ex AC CB . quatuor igitur $HFCK$ AG GE , & quadratis ex AC CB , & ei quod bis sub AC CB continetur rectangulo sunt æqualia; sed $HFCK$ AG GE componunt totum $ADEB$ quadratum quod fit ex AB . quadratum igitur ex AB æquale est, & quadratis ex AC CB , & ei quod bis sub AC CB continetur rectangulo. Quare si recta linea utcumque secta fuerit; quadratum quod fit a tota æquale erit & quadratis quæ a partibus fiunt, & ei rectangulo quod bis sub partibus continetur. atque illud est quod demonstrare oportebat.

Cor. Ex hoc perspicue constat in quadratis spaciis parallelogramma quæ sunt circa diametrum, quadrata esse.

PROP. V. THEOR.

Si recta linea secta fuerit in partes æquales, & in partes inæquales; rectangulum sub inæqualibus totius partibus contentum una cum quadrato lineæ quæ inter sectiones interjicitur, æquale est ei quod a dimidia fit quadrato.

Recta enim linea quævis AB secta fit in partes æquales ad punctum C , & in partes inæquales ad D . dico rectangulum contentum sub AD BD , una cum quadrato quod fit ex

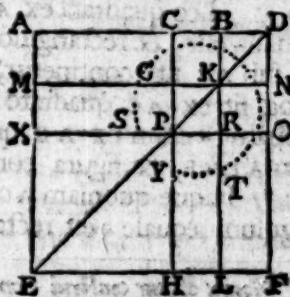
CD

GE, commune apponatur CF: quare totum AF toti CE est æquale. rectangula igitur AF CE dupla sunt rectanguli AF. sed AF CE sunt LKM gnomon, & quadratum CF, ergo KLM gnomon, & quadratum CF dupla erunt rectanguli AF. est autem id quod bis sub AB BC continetur duplum ipsius AF; etenim BF est æqualis BC. gnomon igitur KLM, & quadratum CF æqualia sunt, ei quod bis sub AB BC continetur. commune apponatur HF, quod est ex AC quadratum. ergo gnomon KLM, & quadrata CF HF æqualia sunt ei quod bis sub AB BC continetur, & quadrato ex AC. sed gnomon KLM, & quadrata CF HF componunt ADEB, & CF, quæ sunt ex AB BC quadrata. quadrata igitur ex AB BC æqualia sunt rectangulo, quod bis sub AB BC continetur una cum eo quod fit ex AC quadrato. Ergo si recta linea utcumque secta fuerit; quæ à tota, & una parte sunt utraque quadrata æqualia sunt rectangulo quod bis sub tota, ac dicta parte continetur, & ei quod à reliqua parte fit quadrato; quod ostendere oportebat.

PROP. VIII. THEOR.

Si recta linea utcumque secta fuerit; quod quater sub tota, & una parte continetur rectangulum una cum quadrato reliquæ partis æquale est quadrato quod ex tota, & dicta parte tanquam ex una linea describitur.

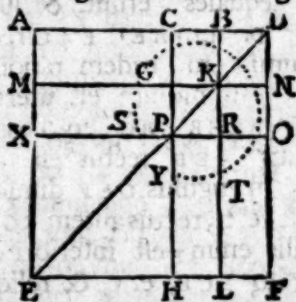
Recta enim linea AB secta sit utcumque in c. dico rectangulum quater sub AB BC contentum una cum quadrato quod ex AC æquale esse quadrato, quod ex AB BC tanquam ex una linea describitur. Producaturs enim recta linea AB in D; & ipsi CB ponatur æqualis BD; describaturque ex AD quadratum AEFD; & dupla figura construatur. quoniam igitur CB est æqualis BD, atque est CB ipsi GK æqualis; BD vero ipsi KN: erit & GK æqualis KN. eadem ratione, & PR ipsi RO est æqualis. & quoniam CA est æqualis BD, & GK ipsi KN; erit rectangulum, quidem CK rectangulo BN; rectangulum vero GR ipsi RN æquale. sed CK est æquale RN, complementa enim sunt parallelogrammi CO, ergo & BN æquale est CK, & quatuor



hyp.
34. primi.

36. primi.
43. primi.
rectangula

rectangula DK KC GR RN inter se æqualia; ideoque quadrupla sunt rectanguli CK. rursus quoniam CB est æqualis BD, & BD quidem ipsi BK, hoc est ipsi CG æqualis; CB vero ipsi GK, hoc est GP: erit & CG æqualis GP. est autem & PR ipsi RO æqualis, rectangulum igitur AG rectangulo MP, & rectangulum PL ipsi RF æquale erit. sed MP est æquale PL; complementa enim sunt ML parallelogrammi. quare & AG ipsi RF est æquale. quatuor igitur AG MP PL RF inter se æqualia sunt, ac propterea ipsius AG quadrupla. ostensum autem est, & quatuor CK BN GR RN quadrupla esse CK. quare octo continentia gnomonem STY ipsius AK quadrupla sunt. & quoniam AK est quod sub AB BC continetur; etenim BK est æqualis BC; erit contentum quater sub AB BC ipsius AK quadruplum. at demonstratus est gnomon STY quadruplus ipsius AK. quod igitur quater sub AB BC continetur æquale est gnomoni STY. commune apponatur XH, quod quidem quadrato ex AC est æquale. ergo quod quater sub AB BC continetur una cum quadrato ex AC æquale est ipsi STY gnomoni, & quadrato XH. sed STY gnomon, & XH totum sunt AEFD quadratum, quod describitur ex AD. rectangulum igitur quater sub AB BC contentum una cum quadrato ex AC æquale est ei, quod ex AD, hoc est ex AB BC tanquam ex una linea describitur, quadrato. Ergo si recta linea utcumque secta fuerit; quod quater sub tota, & una parte continetur rectangulum, una cum quadrato reliquæ partis, æquale est quadrato quod ex tota & dicta parte, tanquam ex una linea describitur. Quod ostendendum fuerat.



* Cor. 4.
hujus.

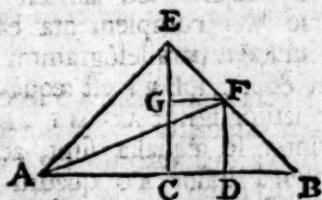
PROP. IX. THEOR.

Si recta linea in partes æquales, & in partes inæquales secta fuerit, quadrata quæ ab inæqualibus totius partibus describuntur, dupla sunt & quadrati dimidia, & quadrati lineæ ejus quæ inter sectiones interjicitur.

Recta enim linea quævis AB secta sit in partes æquales ad C, & in partes inæquales ad D. dico quadrata ex AD, DB, quadratorum ex AC, CD dupla esse. Ducatur enim à puncto C ipsi AB ad rectos angulos CE, & utrivis ipsarum

AC

AC CB æqualis ponatur, junganturque EA EB. ac per D quidem ipsi CE parallela $\parallel$ ducatur DF; per F vero ipsi AB $\parallel$ 31. primi. parallela $\parallel$ FG, & AF ducatur. Itaque quoniam AC est æqualis CE; erit & angulus EAC angulo AEC æqualis. 5. primi. & cum rectus sit angulus ad C, reliqui AEC EAC uni recto æquales $\angle$ erunt. & sunt æquales inter sese. utervis $\angle$ 3. Cor 31. primi.



e 29. primi.

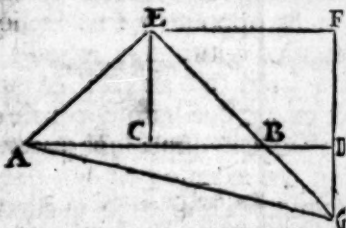
& recti dimidium est utervis ipsorum CEB EBC. ergo totus angulus AEB rectus est. & quoniam angulus GEF dimidium est recti, rectus autem EGF; æqualis enim $\angle$ est interiori & opposito ECB, erit, & reliquus EFG recti dimidium: æqualis igitur est GEF angulus ipsi EFG. quare & latus EG lateri GF est $\parallel$ æquale. rursus quoniam angulus ad B dimidium est recti, rectus autem FDB, quodd sit æqualis interiori & opposito ECB: reliquus BFD recti erit dimidium. angulus igitur ad B æqualis est angulo DFB; ideoque latus DF lateri DB æquale. & quoniam AC est æqualis CE, erit, & ex AC quadratum æquale quadrato ex CE. quadrata igitur ex AC CE dupla sunt quadrati ex AC; quadratis autem ex AC CE æquale $\angle$ est quadratum ex EA, siquidem rectus est $\angle$ 47. primi. angulus ACE, ergo quadratum ex EA quadrati ex AC est duplum. rursus quoniam EG æqualis est GF, & quadratum ex EG quadrato ex GF est æquale. quadrata igitur ex EG & GF dupla sunt quadrati ex GF. at quadratis ex EG GF æquale $\angle$ est quod ex EF quadratum. ergo quadratum ex EF quadrati ex GF duplum erit. æqualis $\parallel$ autem est GF ipsi CD. $\parallel$ 34. primi. quadratum igitur ex EF duplum est quadrati CD. sed & quadratum ex AE quadrati ex AC est duplum. ergo quadrata ex AE EF dupla sunt quadratorum ex AC CD. quadratis vero ex AE EF æquale $\angle$ est ex AF quadratum; quoniam angulus AEF rectus est. quadratum igitur ex AF quadratorum ex AC CD est duplum. sed quadrato ex AF æqualia sunt ex AD DF quadrata. rectus enim est angulus qui ad D. ergo ex AD DF quadrata dupla sunt quadratorum ex AC CD: est autem DF ipsi DB æqualis. quadrata igitur ex AD DB quadratorum ex AC CD dupla erunt. Quare si recta linea in partes æquales, & in partes inæquales secta fuerit, quæ ab inæqualibus totius partibus describuntur quadrata dupla sunt, & quadrati dimidiæ, & quadrati lineæ ejus quæ inter sectiones interjicitur. Quod offendere oportebat.

PROP.

PROP. X. THEOR.

Si recta linea secetur bifariam, & ipsi in directum quævis recta linea adjiciatur; quæ à tota cum adjecta, & adjecta sunt utraque quadrata dupla sunt, & quadrati dimidia, & quadrati quod ab ea quæ ex dimidia, & adjecta constat, tanquam ab una linea describitur.

- Recta enim linea AB secetur bifariam in c , & ipsi in directum adjiciatur quævis recta linea BD . dico quadrata ex AD DB quadratorum ex AC CD dupla esse. Ducatur enim à
- a 11. primi.** puncto c ipsi AB ad rectos a angulos CE , & utrique ipsarum AC CB æqualis ponatur; ducaturque AE EB , & per E quidem ipsi AD parallela b ducatur EF ; per D vero ducatur DF parallela b ipsi CE . & quoniam in parallelas EC FD recta quædam linea EF incidit, anguli CEF EDF æquales c sunt duobus rectis. anguli igitur FEB EDF duobus rectis sunt minores, quæ autem à minoribus, quam sunt duo recti in infinitum producantur, convenient inter se d . ergo EB FD productæ ad partes BD convenient. producantur, & convenient in puncto G , & AG ducatur. itaque quoniam AC est æqualis CE , & angulus AEC angulo EAC æqualis
- e 9. primi.** erit: atque est rectus qui ad c . uterque igitur ipsorum CAE AEC est recti dimidium. eadem ratione, & recti dimidium est uterque CEB EBC . ergo AEB est rectus. &
- f 15. primi.** quoniam EBC est dimidium recti, erit & recti f dimidium DBG ; cum sit ad verticem. sed & BDG rectus est; etenim est æqualis ipsi DCE alterno. reliquus igitur DGB dimidium est recti, & ob id ipsi DBG æqualis. ergo & latus BD
- g 6. primi.** æquale lateri DC . rursus quoniam EGF est dimidium recti, rectus autem qui ad F , est enim angulo opposito qui ad c æqualis; erit, & reliquus FEG recti dimidium, & æqualis ipsi EGF . quare & latus GF lateri EF est æquale g . & cum EC sit æqualis CA ; & quadratum ex EC æquale est ei quod ex CA fit quadrato. ergo quadrata ex EC CA dupla sunt quadrati ex CA . quadratis autem ex EC CA æquale b est quadratum ex EA . quadratum igitur ex EA quadrati ex AC est duplum. rursus quoniam GF est æqualis FE , æquale est, & ex GF quadratum quadrato ex FE . quadrata igitur ex GF FE quadrati ex EF sunt dupla. at quadratis ex GF FE æquale est,



est^b quod ex EG quadratum. ergo quadratum ex EG duplum est quadrati ex EF. æqualis autem est EF ipsi CD. quadratum igitur ex EG quadrati ex CD duplum erit. sed ostensum est quadratum ex EA duplum quadrati ex AC. ergo ex A E EG quadrata, quadratorum ex A C CD sunt dupla. quadratis vero ex A E EG æquale est^b quod ex AG quadratum. quadratum igitur ex AG duplum est quadratorum ex A C CD. at quadrato ex AG æqualia^b sunt ex A D DG quadrata. ergo quadrata ex A D DG sunt dupla quadratorum ex A C CD. sed DG est æqualis DB. quadrata igitur ex A D DB quadratorum ex A C CD sunt dupla. Ergo si recta linea bifariam secetur, & ipsi in rectum quædam recta linea adjiciatur; quæ à tota cum adjecta, & adjecta sunt utraque quadrata dupla sunt & quadrati dimidiæ, & quadrati quod ab ea quæ ex dimidia, & adjecta constat tanquam ab una linea describitur. Quod ostendere oportebat.

47. primi.

PROP. XI. PROBL.

Datam rectam lineam secare, ita ut quod sub tota, & altera parte continetur rectangulum æquale sit ei quod à reliqua parte fit quadrato.

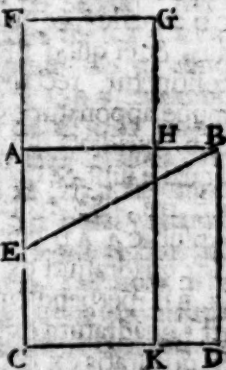
Sit data recta linea AB. oportet ipsam AB ita secare, ut quod sub tota, & altera parte continetur rectangulum æquale sit ei, quod à reliqua parte fit, quadrato. Describatur enim ex AB quadratum ABCD: seceturque AC bifariam in E, & BE ducatur: deinde producta CA in F, F

46. primi.

ponatur ipsi BE æqualis EF: describaturque ex AF quadratum FGHA: & GH ad K producat. dico AB sectam esse in H, ita ut sub AB BH rectangulum æquale sit quadrato ex AH. Quoniam enim recta linea AC bifariam secatur in E, adjiciturque ipsi in directum AF, rectangulum sub CF FA, una cum quadrato ex AE, æquale^b erit quadrato ex EF. sed EF est æqualis EB. rectangulum igitur sub CF FA, una cum quadrato ex AE æquale est ei, quod fit ex EB, quadrato. quadrato autem ex EB æqualia sunt quadrata ex BA AE: etenim angulus ad A rectus est. ergo rectangulum sub CF FA, una cum quadrato ex AE æquale est quadratis ex BA AE. commune auferatur quod ex AE fit quadratum. reliquum igitur rectangulum sub CF FA æquale est quadrato ex AB. est autem sub CF FA rectangulum

6. hujus.

47. primi.

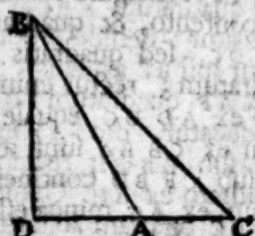


gulum FK ; siquidem AF est æqualis FG : quadratum autem ex AB est ipsum AD . rectangulum igitur FK æquale est quadrato AD . commune auferatur AK . ergo reliquum FH reliquo HD est æquale. atque est HD rectangulum sub AB BH , cum AB sit æqualis BD , & FH est quadratum ex AH . rectangulum igitur sub AB BH quadrato ex AH æquale erit. Quare data recta linea AB secta est in H , ita ut sub AB BH rectangulum quadrato ex AH sit æquale. Quod facere oportebat.

PROP. XII. THEOR.

In obtusangulis triangulis, quod à latere obtusum angulum subtendente fit quadratum majus est quam quadrata quæ sunt à lateribus obtusum angulum continentibus, rectangulo contento bis sub uno laterum quæ sunt circa obtusum angulum, in quod scilicet protractum perpendicularis cadit, & linea assumpta exterius à perpendiculari ad angulum obtusum.

Sit obtusangulum triangulum ABC . obtusum angulum BAC : & ducatur $\cdot$ à puncto B ad CA protractam perpendicularis BD . dico quadratum ex BC majus esse, quam quadrata ex BA AC , rectangulo quod bis sub CA AD continetur. Quoniam enim recta linea CD secta est utcumque in puncto A , erit quadratum ex CD æquale $\cdot$, & quadratis ex CA AD , & ei quod bis sub CA AD continetur rectangulo. commune apponatur ex DB quadratum. quadrata igitur ex CD DB æqualia sunt & quadratis ex CA AD DB , & rectangulo quod bis sub CA AD continetur. sed quadratis ex CD DB æquale est $\cdot$ quadratum ex CB : rectus enim est angulus ad D , cum sit BD perpendicularis. Quadratis vero ex AD DB æquale est $\cdot$ quadratum ex AB . quadratum igitur ex CB æquale est $\cdot$ & quadratis ex CA AB , & rectangulo bis sub CA AD contento. ergo quadratum ex CB majus est quam quadrata ex CA AB , rectangulo quod bis sub CA AD continetur. In obtusangulis igitur triangulis, quadratum quod à latere obtusum angulum subtendente fit, majus est quam quadrata quæ sunt à lateribus obtusum angulum continentibus, rectangulo contento bis sub uno laterum quæ sunt circa obtusum angulum.



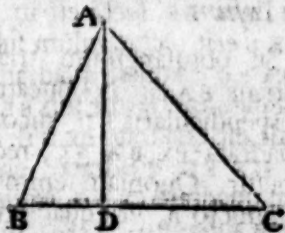
sum angulum, in quod protractum perpendicularis cadit, & linea assumpta exterius à perpendiculari ad angulum obtusum. Quod demonstrare oportebat.

PROP. XIII. THEOR.

In acutangulis triangulis, quod à latere acutum angulum subtendente fit quadratum minus est quam quadrata quæ sunt lateribus acutum angulum continentibus, rectangulo contento bis sub uno laterum quæ sunt circa acutum angulum, in quod perpendicularis cadit, & linea à perpendiculari intus assumpta ad angulum acutum.

Sit acutangulum triangulum ABC acutum habens angulum ad B : & ducatur à puncto A ad BC perpendicularis AD . ^{11. primi.} dico quadratum quod fit ex AC minus esse quam quadrata quæ ex CB & BA fiunt, rectangulo quod bis sub CB & BD continetur. Quoniam enim recta linea CB secta est utcumque in D , erunt

67. hujus.



quadrata ex CB & BD æqualia b , & rectangulo quod bis sub CB & BD continetur, & quadrato ex DC . commune apponatur ex AD quadratum. quadrata igitur ex CB & BD & DA æqualia sunt, & rectangulo bis sub CB & BD contento, & quadratis ex AD & DC . sed quadratis ex BD & DA æquale est c ex AB quadratum; rectus enim angulus est qui ad D . quadratis vero ex AD & DC æquale e est quadratum ex AC . quadrata igitur ex CB & BA sunt æqualia quadrato ex AC , & ei quod bis sub CB & BD continetur rectangulo. quare solum quadratum ex AC minus est quam quadrata ex CB & BA , rectangulo quod bis sub CB & BD continetur. In acutangulis igitur triangulis quadratum quod à latere acutum angulum subtendente fit, minus est quam quadrata quæ sunt à lateribus acutum angulum continentibus, rectangulo contento bis sub uno laterum quæ sunt circa acutum angulum, in quod perpendicularis cadit, & linea à perpendiculari intus assumpta ad angulum acutum. Quod demonstrare oportebat. ^{47. primi.}

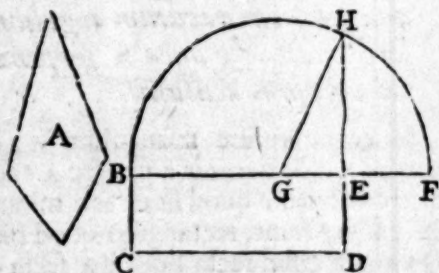
D₂

PROP.

PROP. XIV. PROBL.

Dato rectilineo æquale quadratum constituere.

Sit datum rectilineum A. oportet ipsi A rectilineo æquale
 445. primi. quadratum constituere. Constituatur a rectilineo A æquale
 parallelogrammum rectangulum BCDE. si igitur BE est æ-
 qualis ED, factum jam erit quod proponebatur, etenim
 rectilineo A æquale quadratum constitutum est BD: sin
 minus, una ipsarum BE ED major est. sit BE major; & pro-
 ducatur ad F, ponatur-
 que ipsi ED æqualis
 EF. deinde secta FB bi-
 610. primi. fariam^b in G: centro qui-
 dem G, intervallo autem
 unius ipsarum GB GF
 semicirculus describatur
 BHF; producaturque
 DE in H, & GH ducatur. Quoniam igitur re-
 cta linea BF secta est in partes æquales ad G, & inæquales
 ad E; erit rectangulum sub BE EF, una cum quadrato quod
 fit ex EG, æquale quadrato ex GF. est autem GF æqualis GH.
 c hujus. rectangulum igitur sub BE EF una cum quadrato ex GE, æ-
 447. primi. quale est quadrato ex GH. sed quadrato ex GH æqualia^d sunt
 ex HE EG quadrata. ergo rectangulum sub BE EF una
 cum quadrato ex EG, æquale est quadratis ex HE EG. com-
 mune auferatur ex EG quadratum. reliquum igitur rectan-
 gulum sub BE EF est æquale quadrato ex EH. sed rectan-
 gulum sub BE EF est ipsum BD parallelogrammum, quoniam
 EF est æqualis ED. ergo BD parallelogrammum quadrato
 ex EH est æquale. parallelogrammum autem BD est æquale
 rectilineo A. rectilineum igitur A quadrato ex EH descripto
 æquale erit. Quare dato rectilineo A æquale quadratum con-
 stitutum est, quod videlicet ex ipsa EH describitur. Quod
 facere oportebat.



EUCLIDIS

ELEMENTORUM.

LIBER TERTIUS.

DIFFINITIONES.

I

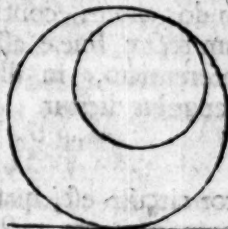
Æ Quales circuli sunt quorum diametri sunt æquales :
vel quorum quæ ex centris sunt æquales.

II.

Recta linea circulum contingere dicitur, quæ contingens
circulum, & producta ipsum non secat.

III.

Circuli contingere se dicun-
tur, qui contingentes, se ipsos
non secant.



IV.

In circulo æqualiter distare
à centro rectæ lineæ dicuntur,
quando à centro ad ipsas per-
pendiculares ductæ sunt æ-
quales.



V.

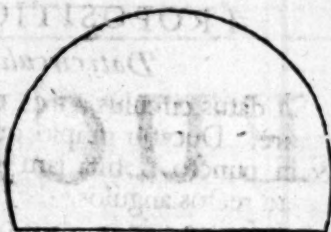
Magis autem distare à centro dicitur ea in quam major
perpendicularis cadit.

D 3

VI.

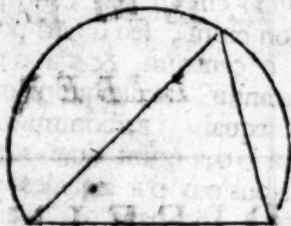
VI.

Segmentum circuli est figura quæ recta linea, & circuli circumferentia continetur.



VII.

Segmenti autem angulus est, qui recta linea, & circuli circumferentia comprehenditur.



VIII.

In segmento angulus est, quando in circumferentia segmenti sumatur aliquod punctum, atque ab ipso ad terminos lineæ ejus quæ basis est segmenti rectæ lineæ ducantur, angulus ductis lineis contentus.



IX.

Quando autem continentes angulum rectæ lineæ assumunt circumferentiam, in illa consistere angulus dicitur.

X.

Sector circuli est, quando angulus ad centrum constituit, figura contenta rectis lineis angulum comprehendentibus, & circumferentia ab ipsis assumpta.

XI.

Similia circularum segmenta sunt, quæ angulos suscipiunt æquales, vel in quibus anguli æquales consistunt.



PROP.

IV

PROPOSITIO I. PROBLEMA.

Dati circuli centrum invenire.

Sit datus circulus ABC . oportet circuli ABC centrum invenire. Ducatur in ipso quædam recta linea AB utcunque, & in puncto D bifariam ^a secetur. à puncto autem D ipsi ^a 10 primi. AB ad rectos angulos ^b ducta DC in E producat; & secetur ^b 11 primi. CE bifariam ^a in F . dico punctum F circuli ABC centrū esse.

Non enim, sed si fieri potest, sit G centrum, & $GA GD GB$ ducantur. itaque quoniam DA est æqualis DB , communis autem DG , erunt duæ $AD DG$ duabus $GD DB$ æquales, altera



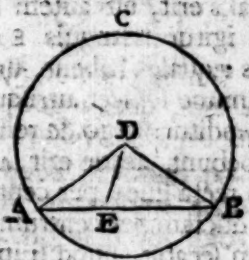
alteri: & basis GA æqualis ^c est basi GB ; sunt enim ex ^c Diffin. centro G . angulus igitur ADG angulo GDB est ^d æqualis. ^d 15. primi. cum autem recta linea super rectam lineam insistens, angulos qui deinceps sunt, æquales inter se fecerit, erectus est uterque æqualium angulorum. ergo angulus GDB est rectus. sed & rectus FDB . æqualis igitur est angulus FDB angulo GDB , major minori, quod fieri non potest. quare G non est circuli ABC centrum. similiter ostendemus neque aliud esse, præter ipsum F . ergo F centrum est circuli ABC . Quod invenire oportebat.

Cor. Si in circulo quævis recta linea, lineam quandam bifariam & ad angulos rectos secet, in secante erit centrum circuli.

PROP. II. THEOR.

Si in circumferentia circuli duo quævis puncta sumantur, quæ ipsa conjungit recta linea intra circumulum cadet.

Sit circulus ABC ; in circumferentia ipsius sumantur duo quævis puncta $A B$. dico rectam lineam quæ à puncto A ad B ducitur, intra circumulum cadere. sumatur in recta AB punctum quodvis E , jungantur $DA DE DB$. Quoniam DA est æqualis DB , erit ^a angulus DAB æqualis angulo DBA , & quoniam trianguli DAE latus A producit erit ^b angulus DEB angulo DAE major, angulus autem DAE æqualis est angulo DDE , ergo DEB angulus angulo DDE

^a 5. primi.^b 16. primi.

D 4

est.

est major. sed majori angulo majus latus subrenditur. major igitur est DB ipsa DE . sed DB ad circumferentiam tantum pertingit. ergo DE non eo usque protenditur. adeoque punctum E cadet intra circulum. Si igitur in circumferentia &c. Quod oportebat demonstrare.

Cor. Hinc si recta circulum tangit, in unico puncto eum tangit.

PROP. III. THEOR.

Si in circulo recta linea per centrum ducta, rectam lineam quandam non ductam per centrum bifariam secet, & ad angulos rectos ipsam secabit. quod si ad angulos rectos ipsam secet, & bifariam secabit.

Sit circulus ABC , & in ipso recta linea per centrum ducta CD rectam lineam quandam AB non ductam per centrum bifariam secet in puncto F . dico ad angulos rectos ipsam secare. sumatur enim circuli

1. hujus ABC centrum E , quod sit E , &

EA EB jungantur. Quoniam igitur AF est æqualis FB , communis autem FE , dux duabus æquales sunt, & basis EA basi EB est æqualis. ergo & angulus AFE angulo BFE æqualis



2. primi.

Diffin 10. primi.

erit. cum autem recta linea super rectam insilens angulos, qui deinceps sunt, æquales inter se fecerit, rectus est uterque æqualium angulorum. Interque igitur AFE BFE est rectus. quare recta linea CD per centrum ducta rectam lineam AB non ductam per centrum bifariam secans, & ad angulos rectos ipsam secabit. Si vero CD secet AB ad rectos angulos, dico & bifariam ipsam secare, hoc est AF ipsi FB æqualem esse. iisdem enim constructis, quoniam EA , quæ

3. primi.

ex centro est æqualis EB , & angulus EAF angulo EBF æqualis erit, est autem & AFE rectus æqualis recto BFE . duo igitur triangula EAF EBF duos angulos duobus angulis æquales habent, unumque latus uni lateri æquale EF , commune scilicet utrique, quod uni angulorum æqualium subpenditur. ergo & reliqua latera reliquis lateribus æqualia habebunt. atque erit AF ipsi FB æqualis. Si igitur in circulo recta linea per centrum ducta rectam lineam quandam non ductam per centrum bifariam secet, & ad angulos rectos ipsam secabit. quod si ipsam secet ad rectos angulos, & bifariam secabit. Quod oportebat demonstrare.

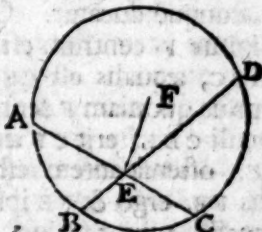
4. 6. primi.

PROP.

PROP. IV. THEOR.

Si in circulo duæ rectæ lineæ se invicem secant non ductæ per centrum, sese bifariam non secabunt.

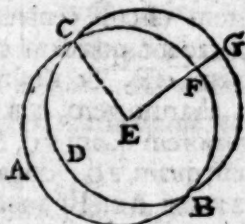
Sit circulus $ABCD$; & in ipso duæ rectæ lineæ $ACBD$ se invicem secant in puncto E , non ductæ per centrum. dico eas sese bifariam non secare. si enim fieri potest secant sese bifariam, ita ut AE sit æqualis EC , & BE ipsi ED : sumaturque F centrum $ABCD$ circuli, quod sit E , & EF jungatur. quoniam igitur recta linea FE per centrum ducta rectam lineam quandam AC non ductam per centrum bifariam secat, & ad rectos angulos ipsam secabit. quare rectus est FEA angulus. ^{1. hujus.} rursus quoniam recta linea FE rectam lineam quandam BD non ductam per centrum bifariam secat, & ad angulos rectos ipsam ^{2. hujus.} secabit. rectus igitur angulus est FEB . ostensus autem est rectus & FEA . ergo FEA angulus ipsi FEB æqualis erit, minor majori, quod fieri non potest. non igitur $ACBD$ sese bifariam secant. Quare si in circulo duæ rectæ lineæ se invicem secant non ductæ per centrum, sese bifariam non secabunt. Quod ostendere oportebat.



PROP. V. THEOR.

Si duo circuli se invicem secant, non erit ipsorum idem centrum.

Duo enim circuli se invicem secant ABC CDG in punctis C & D . dico ipsorum idem centrum non esse. Si enim fieri potest, sit centrum E ; jungaturque EC , & ED utcumque ductur. Quoniam E centrum est circuli ABC erit CE ipsi AE æqualis. rursus quoniam E centrum est CDG circuli, æqualis est CE ipsi EG . sed ostensa est CE æqualis ED . ergo ED ipsi EG æqualis erit, minor majori, quod fieri non potest. non igitur punctum E centrum est circulorum ABC & CDG . Quare si duo circuli se invicem secant, non erit ipsorum idem centrum. Quod ostendendum fuit.

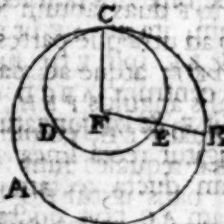


PROP. VI.

PROP. VI. THEOR.

Si duo circuli sese intra contingant, ipsorum idem centrum non erit.

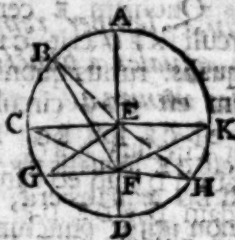
Duo enim circuli ABC CDE contingant sese intra in puncto c . dico ipsorum non esse idem centrum. si enim fieri potest sit F ; jungaturque FC , & FEB utcumque ducatur. Quoniam igitur F centrum est circuli ABC , æqualis est CF ipsi FB . rursus quoniam F centrum est circuli CDE , erit CF æqualis FE . ostensa autem est CF æqualis FB . ergo & FE ipsi FB est æqualis, minor majori, quod fieri non potest. non igitur F punctum centrum est circulorum ABC CDE . Quare si duo circuli sese intra contingant, ipsorum idem centrum non erit. Quod demonstrare oportebat.



PROP. VII. THEOR.

Si in circuli diametro aliquod punctum sumatur, quod non sit centrum circuli, & ab eo in circulum cadant quævis rectæ lineæ; maxima quidem erit in qua centrum: minima vero reliqua: aliarum autem propinquior ei quæ per centrum transit, semper remotiore major est. at duæ tantum æquales ab eodem puncto in circulum cadent ad utrasque partes minime.

Sit circulus $ABCD$, cujus diameter AD : & in ipsa AD sumatur aliquod punctum F , quod non sit centrum circuli. Sit autem circuli centrum E : & a puncto F in circulum $ABCD$ cadant quædam rectæ lineæ FB FC FG . dico FA maximam esse, & FD minimam: aliarum vero, FB quidem majorem quam FC , & FC majorem quam FG . jungantur enim BE CE GE . Et quoniam omnis trianguli duo latera reliquo sunt majora; erunt BB BF majores quam BE . est autem AE æqualis ED . ergo BE EF ipsi AE sunt æquales. major igitur est AF quam FB . rursus quoniam BE est æqualis EG , communis autem FE , duæ BE EF duabus CE EF æ-



420. primi.

qua
igit
est
EG
ED
qua
maj
pun
ABC
near
æqu
est
HE
HE
F in
fieri
que
licet
tiori
liqu
Quo

S
ab e
rum
earu
dun
aute
tore
vent
diam
mini
tum
part

Sit
punc
quæ
earu
cadu
mini
jicitu
10.

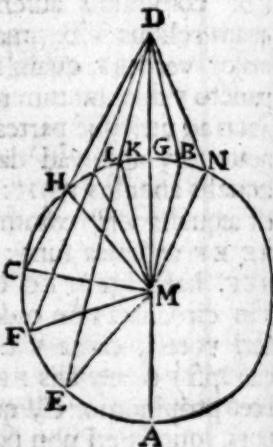
quales sunt. sed $\angle BEF$ angulus major est angulo $\angle CEF$: basis igitur BF basi FC est ^b major. eadem ratione & CF major ^{b 24. primi.} est quam FG . rursus quoniam GF FE majores sunt quam EG , æqualis autem GE ipsi ED ; erunt GF FE majores quam ED . communis auferatur EF . ergo reliqua GF major est quam reliqua FD . maxima igitur est FA , & FD minima: major vero BF quam FC , & FC quam FG major. dico & à puncto F duas tantum rectas lineas æquales cadere in circulum $ABCD$ ad utrasque partes minimæ FD . constituatur enim ad lineam EF , atque ad datum in ea punctum E , angulo $\angle GEF$ æqualis angulus $\angle FEH$: & FH jungatur. quoniam igitur GE est æqualis EH , communis autem EF , duæ GE EF duabus HE EF æquales sunt: & angulus $\angle GEF$ est æqualis angulo $\angle HEF$. basis igitur FG basi FH æqualis ^d erit. dico à puncto F in circulum non cadere aliam ipsi FG æqualem. si enim fieri potest, cadat FK . & quoniam FK est æqualis FG , estque ipsi FG æqualis FH ; erit & FK ipsi FH æqualis, videlicet propinquior ei, quæ per centrum transit, æqualis remotiori, quod fieri non potest. Si igitur in circuli diametro aliquod punctum sumatur quod non sit centrum circuli, &c. Quod demonstrare oportebat. ^{d 4. primi.}

PROP. VIII. THEOR.

Si extra circulum aliquod punctum sumatur, atque ab eo ad circulum ducantur quædam rectæ lineæ, quarum una per centrum transeat, aliæ vero utcumque: earum quidem quæ in concavam circumferentiam cadunt, maxima est quæ per centrum transit; aliarum autem propinquior ei quæ per centrum, semper remotiore major est. at earum quæ in convexam circumferentiam cadunt minima est quæ inter punctum, & diametrum interjicitur; aliarum vero quæ propinquior minimæ semper remotiore est minor. duæ autem tantum æquales à puncto in circulum cadunt ad utrasque partes minimæ.

Sit circulus ABC , & extra circulum sumatur aliquod punctum D : ab eo autem in circulum ducantur rectæ lineæ quædam DA DE DF DC : sitque DA per centrum. dico earum quidem quæ in concavam AEC circumferentiam cadunt, maximam esse DA quæ per centrum transit; & minimam quæ inter punctum D , & diametrum AG interjicitur, videlicet DG : majorem autem DE quam DF ; & DF majorem

- maorem quam DC : earum vero quæ in convexam circumferentiam $HLKG$ cadunt, quæ propinquior est minimæ DG semper remotiore esse minorem; hoc est DK minorem
- a 1. hujus quam DL & DL minorem quam DH . sumatur enim centrum circuli ABC , quod sit M , & jungantur ME MF MC MH ML . & quoniam AM est æqualis ME , communis apponatur MD . ergo AD est
- b 20. primi. æqualis ipsis EM MD . sed EM MD sunt majores ED quam ED . ergo & AD quam ED est major. rursus quoniam æqualis est ME ipsi MF , communis apponatur MD . erunt EM MD ipsi MF MD æquales; at angulus EMD major est angulo FMD . basis igitur ED basi FD major erit. similiter demonstrabimus, & FD majorem esse quam CD . ergo maxima est DA ; major autem DE quam DF , & DF quam DC major. præterea quoniam
- d Axiom. 4. MK KD sunt majores ED quam MD , & MG est æqualis MK ; erit reliqua KD quam reliqua GD major. quare GD minor quam KD , & idcirco GD minima est. & quoniam trianguli MLD in uno latere MD , duæ rectæ lineæ MK KD intra constituuntur, erunt MK KD minores ipsis ML LD , quarum MK est æqualis ML . reliqua igitur DK minor est quam reliqua DL . similiter ostendemus, & DL quam DH minorem esse. ergo DG minima est. minor vero DK quam DL , & DL minor quam DH . dico etiam duas tantum æquales à puncto D in circulum cadere ad utrasque minimæ partes. constitutur ad rectam lineam MD , ad datumque in ea punctum M , angulo KMD æqualis DMB , & DB jungatur. itaque quoniam MK est æqualis MB , communis autem MD , duæ KM MD duabus BM MD æquales sunt, altera alteri, & angulus KMD æqualis angulo BMD , basis igitur DK basi DB est æqualis g . dico à puncto D aliam ipsi DK æqualem in circulum non cadere. si enim fieri potest, cadat DN . & quoniam DK est æqualis DN , & DK ipsi DB est æqualis; erit & DB æqualis DN , propinquior scilicet minimæ æqualis remotiori, quod fieri non posse ostensum est. Si igitur extra circulum aliquod punctum sumatur, &c. quod ostendere oportebat.

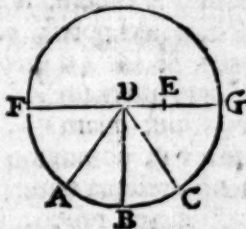


PROP.

PROP. IX. THEOR.

Si intra circulum sumatur aliquod punctum, atque ab eo in circulum cadant plures quam duæ rectæ lineæ æquales; punctum quod sumitur circuli centrum erit.

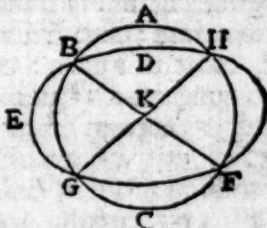
Sumatur enim intra circulum ABC punctum aliquod D: atque à puncto D in circulum ABC cadant plures quam duæ rectæ lineæ æquales DA DB DC. dico punctum D, quod sumitur, circuli ABC esse centrum. Non enim sed; si fieri potest, sit E centrum, & juncta DE in FG producat. ergo FG diameter est ABC circuli. itaq; quoniam in FG diametro circuli ABC sumptum est aliquod punctum D quod non est centrum circuli, maxima quidem erit DG, major ^a autem DC quam DB, & DB quam DA. sed & æquales ^b, quod ^a 7. hujus. ^b ex hyp. fieri non potest. non igitur E centrum est circuli ABC. similiter ostendemus neque aliud punctum centrum esse præter ipsum D. ergo D circuli ABC centrum erit. Quod oportebat demonstrare.



PROP. X. THEOR.

Circulus circulum in pluribus, quam duobus punctis non secat.

Si enim fieri potest circulus ABC circulum DEF secet in pluribus punctis, quam duobus; nempe in B G F, & circuli ABC centrum sumatur, quod sit K, & KB KG KF junctantur. Quoniam igitur intra circulum DEF sumptum est aliquod punctum K, à quo in circulum DEF incidunt plures, quam duæ rectæ lineæ KB KG KF æquales, erit punctum K circuli DEF centrum ^a. est autem, & circuli ABC centrum K. duorum igitur circulorum, qui se se secant, idem erit K ^b Ex hyp. centrum, quod fieri non potest. Quare circulus circulum in pluribus,



^a 9. hujus.

^b Ex hyp.

pluribus quam duobus punctis non secatur. Quod oportebat demonstrare.

PROP. XI. THEOR.

Si duo circuli sese intus contingant, & sumantur centra ipsorum; recta linea ipsorum centra conjungens producta in circulorum contactum cadet.

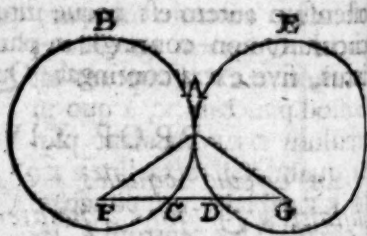
Duo enim circuli ABC ADE sese intus contingant in puncto A , & sumatur circuli quidem ABC centrum quod sit F , circuli vero ADE centrum G . dico rectam lineam à puncto G ad F ductam, si producat in punctum A cadere. non enim; sed, si fieri potest, cadat ut $FGDH$. & AF AG jungantur. Itaque quoniam AG GF majores sunt quam FA , hoc est quam FH , communis auferatur FG . reliqua igitur AG major est quam reliqua GH . sed AG est æqualis GD . ergo GD ipsa GH est major, minor majore, quod fieri non potest. non igitur à puncto F ad G ducta recta linea extra contactum A cadet: quare in ipsum cadat necesse est. Si igitur duo circuli sese intus contingant, recta linea ipsorum centra conjungens, si producat in contactum circulorum cadet. Quod oportebat demonstrare.



PROP. XII. THEOR.

Si duo circuli se se extra contingant, recta linea ipsorum centra conjungens per contactum transibit.

Duo enim circuli ABC ADE sese extra contingant in puncto A ; & sumatur circuli quidem ABC centrum quod sit F : circuli vero ADE centrum G . dico rectam lineam, quæ à puncto F ad G ducitur, per contactum A transire. non enim; sed, si fieri potest, cadat ut $FCDG$: & FA AG jungantur. Quoniam igitur F centrum est circuli ABC , erit AF æqualis FC . rursus quoniam G centrum est ADE circuli, erit AG ipsi GD æqualis. ostensum est autem, & AF æqualis FC . sunt igitur FA AG ipsis FC GD æquales. ergo tota FG major est quam FA AG . sed &



minor,

minor, quod fieri non potest. non igitur à puncto F ad G ^{20. primi} ducta recta linea per contactum A non transibit. quare per ipsum transeat necesse est. Si igitur duo circuli sese extra contingant, recta linea ipsorum centra coniungens per contactum transibit. Quod oportebat demonstrare.

PROP. XIII. THEOR.

Circulus circulum non contingit in pluribus punctis quam uno, siue intus siue extra contingat.

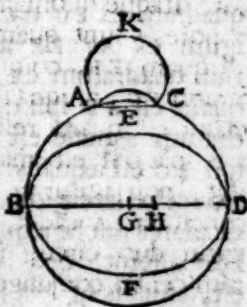
Si enim fieri potest, circulum ABCD circulus EBFD contingat primum intus in pluribus punctis quam uno, videlicet in B D: & sumatur circuli quidem ABCD centrum G; circuli vero EBFD centrum H. ergo recta linea quæ à puncto G ad H ducitur, in puncta B D cadet. cadat ut BGHD. & quoniam G centrum est circuli ABCD, erit BG ipsi GD æqualis. maior igitur est BG, quam HD: & BH quam HD multo maior. rursus quoniam H centrum est EBFD circuli, æqualis est BH ipsi HD. atqui ostensa est ipsa multo maior, quod fieri non potest. non igitur circulus circulum intus contingit in pluribus punctis, quam uno. dico etiam neque extra contingere. si enim fieri potest, circulus ACK circulum ABCD extra contingat in pluribus punctis quam uno, videlicet in AC, & AC jungatur. itaque quoniam in circumferentia utrorumque circulorum ABCD ACK sumpta sunt duo puncta AC; recta linea, quæ ipsa coniungit intra utrumque ipsorum cadet. sed intra circulum quidem ABCD cadit, extra circulo vero ACK, quod est absurdum. Non igitur circulus circulum extra contingit in pluribus punctis quam uno. ostensum autem est neque intus contingere. circulus igitur circulum non contingit in pluribus punctis quam uno, siue intus, siue extra contingat. Quod oportebat demonstrare.

PROP. XIV. THEOR.

In circulo æquales rectæ lineæ æqualiter à centro distant: & quæ æqualiter à centro distant, inter se sunt æquales.

Sit circulus ABCD, & in ipso æquales rectæ lineæ AB CD. dico eas à centro æqualiter distare. Sumatur enim circuli

ABDC



a 11 hujus.

b 1 hujus.

ABDC centrum quod fit E, & ab ipso ad ABCD perpendiculares ducantur EF EG, & AE EC jungantur. Quoniam igitur recta linea quaedam per centrum ducta EF rectam lineam quandam AB non ductam per centrum ad rectos

63. hujus.

angulos secat, & bifariam ipsam secabit^a. quare AF est æ-

qualis FB, ideoque AB ipfius AF dupla. eadem ratione, & CD dupla est CG. atque est AB ipfi CD æqualis. æqualis igitur & AF ipfi CG. & quoniam AE est æqualis EC, erit, & quadratum ex AE quadrato ex EC æquale. sed quadrato



64. primi.

quidem ex AE æqualia sunt ex AF FE quadrata^b; rectus enim angulus est ad F: quadrato autem ex EC æqualia sunt quadrata ex EG GC, cum angulus ad G sit rectus. quadrata igitur ex AF FE æqualia sunt quadratis ex CG GE, quorum quadratum ex AF quadrato ex CG æquale, etenim æqualis est AF ipfi CG. reliquum igitur quod fit ex FE quadratum æquale est reliquo quod ex EG; ac propterea FE ipfi EG est æqualis. in circulo autem æqualiter distare à centro rectæ lineæ dicuntur, quando à centro ad ipsas perpen-

64. diff. hujus.

diculares ductæ æquales^c sunt. ergo ABCD à centro æqualiter distant. Sed si ABCD æqualiter distant à centro, hoc est, æqualis sit FE ipfi EG; dico AB ipfi CD æqualem esse. iisdem enim constructis, similiter ostendemus AB duplam esse ipfius AF, & CD duplam ipfius CG. & quoniam æqualis est AE ipfi EC, erit & ex AE quadratum quadrato ex EC æquale. sed quadrato quidem ex AE æqualia^b sunt quadrata ex EF FA: quadrato autem ex EC æqualia^b quadrata ex EG GC. quadrata igitur ex EF FA quadratis ex EG GC æqualia sunt. quorum quadratum ex EG æquale est quadrato ex EF, est enim EG ipfi EF æqualis: reliquum igitur ex AF quadratum æquale est reliquo ex CG. ergo AF ipfi CG est æqualis. atque est AB ipfius AF dupla, & CD dupla ipfius CG. In circulo igitur æquales rectæ lineæ æqualiter à centro distant, & quæ æqualiter à centro distant, inter se sunt æquales. Quod oportebat demonstrare.

PROP.

1.
3.

In /
m

Sit
prop
FG.
cantu
& qu
sit, n
EK q
tur i
per L
gulos
catur,
EFE
est æq
MN a
æqual
EN æ
AD n
igitur
FE E
& basi
qualis
est A D
maxim
quæ p
nonstr

Quæ a
duc
ter
alte
omn
tem

Sit
lico re
ulos

PROP. XV. THEOR.

In circulo maxima quidem est diameter: aliarum vero semper propinquior ei quæ per centrum transit, remotiore major est.

Sit circulus ABCD, cujus diameter AD, centrum E; & propinquior quidem diametro AD sit BC; remotior vero FG. dico AD maximam esse, & BC majorem quam FG. Ducantur enim à centro E ad BC FG perpendiculares EH EK. & quoniam BC propinquior est ei quæ per centrum transit, remotior autem FG; erit



EK quam EH major. ponatur ipsi EH æqualis EL, & per L ipsi EK ad rectos angulos ducta LM in N producat, & jungantur EM EN EF EG. quoniam igitur EH est æqualis EL, erit & BC ipsi MN æqualis. rursus quoniam

æqualis est AE ipsi EM, & DE ipsi EN, erit & AD ipsis ME EN æqualis. sed ME EN majores sunt quam MN; ergo & AD major est quam MN: & MN est æqualis BC, erit igitur AD quam BC major. quod cum duæ EM EN duabus FE EG æquales sint, angulusque MEN major angulo FEG, & basis MN basi FG major erit. ostensa autem est MN æqualis BC ergo & BC quam FG est major. maxima igitur est AD diameter, & BC major quam FG. Quare in circulo maxima est diameter, aliarum vero semper propinquior ei quæ per centrum transit remotiore est major. Quod demonstrare oportebat.

14. hujus

20. primi.

24. primi.

PROP. XVI. THEOR.

Quæ diametro circuli ad rectos angulos ab extremitate ducitur, cadit extra circulum: & in locum qui inter rectam lineam, & circumferentiam interjicitur altera recta linea non cadet: & semicirculi angulus omni angulo acuto rectilineo major est; reliquus autem minor.

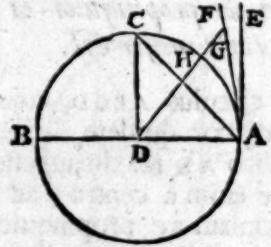
Sit circulus ABC circa centrum D, & diametrum AB. dico rectam lineam, quæ à puncto A ipsi AB ad rectos angulos ducitur extra circulum cadere. non enim; sed, si fieri potest,

E

potest,

potest, cadat intus, ut AC , & DC jungatur. itaque quoniam æqualis est DA ipsi DC , erit & angulus DAC angulo ACD æqualis ^a. rectus autem est DAC ; ergo & ACD est rectus; ac propterea anguli DAC ACD duobus rectis æquales sunt.

^b 17. primi. quod fieri non potest ^b. non igitur à puncto A ipsi BA ad rectos angulos ducta cadet intra circulum. similiter ostendimus neque in circumferentiam cadere. extra igitur cadat necesse est. cadat ut AE . dico in locum qui inter re-



ctam lineam AE & circumferentiam CHA interjicitur, alteram rectam lineam non cadere. si enim fieri potest, cadat ut FA , & à puncto D ad FA perpendicularis ^c ducatur DG .

^d 19. primi. & quoniam rectus est angulus AGD , minor autem recto DAG , erit DA quàm DG major ^d. æqualis autem est DA ipsi DH . major igitur est DH ipsa DG , minor majore, quod fieri non potest. non igitur in locum qui inter rectam lineam & circumferentiam interjicitur, altera recta linea cadet. dico præterea angulum semicirculi, qui recta linea BA , & circumferentia CHA continetur, omni angulo acuto rectilineo majorem esse; reliquum vero contentum circumferentia CHA , & recta linea AE omni angulo rectilineo esse minorem. si enim est aliquis angulus rectilineus acutus major quidem contento recta linea BA , & CHA circumferentia, aut aliquis minor contento CHA circumferentia, & recta linea AE , in locum qui inter circumferentiam CHA , & rectam lineam AE interjicitur, cadet aliqua recta linea quæ faciet angulum majorem quidem contento recta linea BA & CHA circumferentia, qui scilicet rectis lineis continetur, minorem vero contento circumferentia CHA , & AE recta linea, non cadit autem ^e: non igitur erit angulus acutus qui rectis lineis continetur, major angulo contento recta linea BA , & CHA circumferentia; neque minor contento circumferentia CHA , & AE recta linea.

^e ex prius demonstratis.

Cor. Ex hoc manifestum est rectam lineam quæ ab extremitate diametri circuli ad rectos angulos ducitur, circumlum contingere, & rectam lineam contingere circumlum in uno tantum puncto quoniam quæ occurrit in duobus punctis intra ipsum cadit, ut ostensum est.

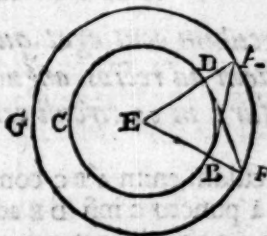
PROP.

PROP. XVII. PROBL.

A dato puncto rectam lineam ducere quæ datum circulum contingat.

Sit datum quidem punctum A, datus autem circulus BCD. oportet à puncto A rectam lineam ducere, quæ circulum BCD contingat. sumatur enim centrum circuli E; & juncta AE, centro quidem E, intervallo autem EA circulus AFG describatur: & à puncto D

ipfi EA ad rectos angulos ^a ducatur DF: junganturque EBF AB. dico à puncto A ductam esse AB quæ circulum BCD contingit. quoniam enim E centrum est circulo-



^a 11. primi.

rum BCD AFG, erit EA æqualis EF, & ED ipfi EB. duæ igitur AE EB duabus FE ED æquales sunt, & angulum communem continent qui est ad E. ergo basis DF basi AB est ^b æqualis, triangulumque DEF æquale triangulo EBA, & reliqui anguli reliquis angulis. æqualis igitur est angulus EBA angulo EDF. & EDF rectus est. quare & rectus EBA: atque est EB ex centro. quæ autem diametro circuli ab extremitate ad rectos angulos ducitur circulum contingit ^b. ergo AB contingit circulum. A dato igitur puncto A ducta est recta linea AB quæ circulum BCD contingit. Quod facere oportebat.

^b 4. primi.

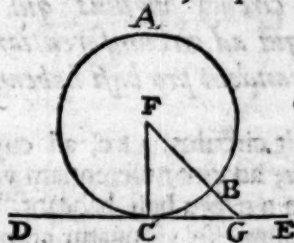
^c 16. hujus.

PROP. XVIII. THEOR.

Si circulum contingat quædam recta linea, à centro autem in contactum recta linea ducatur, ea ad contingentem perpendicularis erit.

Circulum enim ABC contingat quædam recta linea DE in puncto C: & circuli ABC centrum sumatur F, à quo ad C

ducatur FC. dico FC ad ipsam DE perpendicularem esse. si enim non ita sit, ducatur à puncto F ad DE perpendicularis ^a FG. quoniam igitur angulus FGC rectus est, erit GCF acutus ^b, ac propterea FGC angulus major angulo FCG. majorem autem angulum majus latus ^c subtendit.



^a 11. primi.

^b 32. primi.

^c 19. primi.

major igitur est FC quam FG. æqualis autem FC ipfi FB. ergo

E 2

ergo

ergo FB ipsa FG est major, minor majore, quod fieri non potest. non igitur FG est perpendicularis ad DE . similiter ostendemus neque aliam quampiam esse præter ipsam FC . ergo FC ad DE est perpendicularis. Si igitur circulum contingat quædam recta linea, à centro autem in contactum recta linea ducatur, ea ad contingentem perpendicularis erit. Quod oportebat demonstrare.

PROP. XIX. THEOR.

Si circulum contingat quædam recta linea, à contactu autem ad rectos angulos contingenti recta linea ducatur: in ea circuli centrum erit.

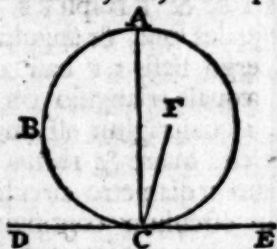
Circulum enim ABC contingat quædam recta linea DE in C , & à puncto C ipsi DE ad rectos angulos ducatur CA . dico in ipsa AC circuli centrum esse. non enim; sed, si fieri potest, sit F centrum, & jungatur CF .

quoniam igitur circulum ABC contingit quædam recta linea DE , & à centro ad contactum ducta est FC ; erit FC ad ipsam DE perpendicularis ^a. rectus igitur angulus est FCE . est autem & ACE re-

^a 18. hujus.

^b Ex hyp.

ctus ^b. ergo FCE angulus est æqualis angulo ACE , minor majori, quod fieri non potest. non igitur F centrum est ABC circuli. similiter ostendemus neque aliud aliquod esse præterquam in ipsa AC . Quare si circulum contingat quædam recta linea, à contactu autem ad rectos angulos contingenti recta linea ducatur; in ea circuli erit centrum. Quod demonstrare oportebat.



PROP. XX. THEOR.

In circulo angulus qui ad centrum duplex est ejus qui ad circumferentiam est, quando circumferentiam eandem pro basi habeant.

Sit circulus ABC , ad cujus centrum quidem angulus sit BEC , ad circumferentiam vero BAC , & eandem circumferentiam BC pro basi habeant. dico BEC angulum anguli BAC duplum esse. jungatur enim AE , & ad F producat. itaque quoniam EA est æqualis EB , erit & angulus EAB an-

^a 5. primi. gulo EBA ^a æqualis, anguli igitur EAB EBA duplices sunt

ipsius

ipſius anguli EAB ; ſed angulus BEF eſt æqualis $\angle$ angulis $\angle$ 32. primi. EAB EBA ; ergo BEF angulus anguli EAB eſt duplex. eadem ratione & angulus FEC duplex eſt ipſius EAC . totus igitur BEC totius BAC duplex erit. rurfus inſectatur, & ſit alter angulus BDC , junctaque DE ad G producat. ſimiliter oſtendemus angulum GEC anguli EDC duplum eſſe; quorum GEB duplus eſt ipſius EDB . ergo reliquus BEC reliqui BDC eſt duplus. In circulo igitur angulus qui ad centrum duplex eſt ejus qui ad circumferentiam, quando circumferentiam eandem pro baſi habeant. Quod oportebat demonſtrare.



PROP. XXI. THEOR.

In circulo qui in eodem ſegmento ſunt anguli inter ſe æquales ſunt.

Sit circulus $ABCDE$, & in eodem ſegmento $BAED$ anguli ſint BAD BED . dico eos inter ſe æquales eſſe. ſumatur enim circuli $ABCDE$ centrum quod ſit F : junganturque BF FD . Quoniam angulus quidem BFD eſt ad centrum, angulus vero BAD ad circumferentiam, & circumferentiam eandem BCD pro baſi habent; erit BFD angulus $\angle$ anguli BAD duplus. eadem ratione angulus BFD duplus eſt etiam anguli BED . ergo angulus BAD angulo BED æqualis erit. ſi anguli BAD BED ſunt in ſegmento minore ſemicirculo, ducatur AE , eruntque omnes anguli trianguli ABG æquales $\angle$ omnibus angulis trianguli DEG . & anguli ABE ADE ſunt æquales per hæcenus demonſtrata, & anguli AGB DGE ſunt etiam æquales, adverticem enim ſunt: quare & reliquus BAG reliquo GED æqualis erit. In circulo igitur qui in eodem ſegmento ſunt anguli inter ſe æquales ſunt. Quod oportebat demonſtrare.



$\angle$ 30. hujus.



$\angle$ 32. primi.

$\angle$ 15. primi.

E 3

PROP.

PROP. XXII. THEOR.

Quadrilaterorum quæ in circulis describuntur, anguli oppositi duobus rectis æquales sunt.

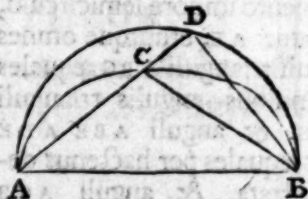
Sit circulus $AEDC$, & in ipso quadrilaterum $ABCD$. dico angulos ipsius oppositos duobus rectis æquales esse. Jungantur AD BC : quoniam igitur omnis trianguli tres anguli duobus rectis sunt æquales ^a, erunt trianguli ABC tres anguli CAB ABC BCA æquales duobus rectis. sed angulus ABC est ^b 21. huius. æqualis ^b angulo ADC , in eodem enim sunt segmento $ABDC$. & angulus ACB æqualis ^b ipsi ADB , quod sunt in eodem $ACDB$ segmento: totus igitur angulus BDC angulis ABC ACB æqualis est. communis apponatur BAC angulus; erunt anguli BAC ABC ACB , angulis BAC BDC æquales. sed BAC ABC ACB sunt æquales ^a duobus rectis. ergo & anguli BAC BDC duobus rectis æquales erunt. similiter ostendemus angulos quoque ABD ACD duobus rectis esse æquales. Quadrilaterorum igitur quæ in circulis describuntur, anguli oppositi duobus rectis æquales sunt. Quod oportebat demonstrare.



PROP. XXIII. THEOR.

Super eadem recta linea duo circulorum segmenta similia, & inæqualia ex eadem parte non constituentur.

Si enim fieri potest, super eadem recta linea AB duo circulorum segmenta similia, & inæqualia constituentur ex eadem parte ACB ADB ; ducaturque ACD , & CB BD jungantur. itaque quoniam segmentum ACB simile est segmento ADB , similia autem circulorum segmenta sunt quæ angulos suscipiunt ^a æquales; ^a Diffn. 11. huius. erit ACB angulus æqualis angulo ADB , exterior interiori, quod fieri non potest ^b. Non igitur super eadem recta linea, duo circulorum segmenta similia, & inæqualia ex eadem parte constituentur. Quod demonstrare oportebat.



PROP.

PROP. XXIV. THEOR.

Super æqualibus rectis lineis similia circularum segmenta inter se æqualia sunt.

Sint enim super æqualibus rectis lineis AB CD similia circularum segmenta AEB CFD . dico segmentum AEB segmento CFD æquale esse. applicato enim AEB segmento segmento CFD , & posito puncto quidem A in C , recta vero linea AB in CD ; congruet & B punctum puncto D , propterea quod AB ipsi CD sit æqualis. congruente autem recta linea AB rectæ CD ; congruet & AEB segmentum segmento CFD . si enim AB congruet ipsi CD , segmentum autem AEB segmento CFD non congruet, sed permutabitur ut CGD , circulus circulum in pluribus quàm duobus punctis secabit. etenim circulus CGD circulum CFD secat in pluribus punctis quàm duobus, videlicet in punctis C G D , quod fieri non potest. non igitur congruente recta linea AB rectæ CD , non congruet & AEB segmentum segmento CFD . quare congruet, & ipsi æquale erit. Super æqualibus igitur rectis lineis similia circularum segmenta inter se æqualia sunt. Quod oportebat demonstrare.



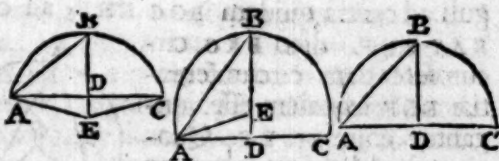
PROP. XXV. PROBL.

Circuli segmento dato describere circulum cujus est segmentum.

Sit datum circuli segmentum ABC . oportet describere circulum cujus ABC est segmentum. Secetur AC bifariam a in D : & à puncto D ipsi AC ad rectos a 10. primi. angulos ducatur b

b 11. primi.

DB , & AB jungatur. vel igitur angulus ABD major est angulo BAD , vel minor, vel ipsi æqualis. sit primum major, & ad rectam



lineam BA , atque ad datum in ea punctum A constituatur angulus BAE æqualis c angulo ABD ; & DB ad E producat, c 13. primi. jungaturque EC . quoniam igitur angulus ABE est æqualis angulo

E 4

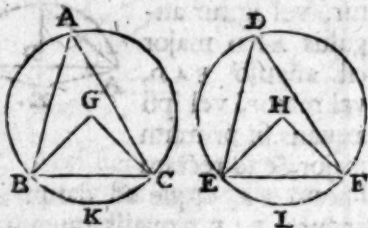
angulo

¶ 6. primi. angulo BAE, erit & BE recta linea ipsi EA æqualis. & quoniam AD est æqualis DC, communis autem DE, duæ AD DE duabus CD DE æquales sunt, altera alteri; & angulus ADE æqualis angulo CDE, rectus enim uterque est. ergo & basis AE basi EC est æqualis. sed ostensa est AE æqualis EB. quare & BE ipsi EC est æqualis, ac propterea tres rectæ lineæ AE EB EC inter se æquales sunt. centro igitur E intervallo autem una ipsarum AE EB EC circulus descriptus etiam per reliqua transibit puncta, & circulus descriptus erit. quare circuli segmento dato descriptus est circulus cujus segmentum est. sed & illud constat, segmentum ABC semicirculo minus esse; propterea quod centrum ipsius extra cadit. similiter, & si angulus ABD sit æqualis angulo BAD, facta AD æquali utrique ipsarum BD DC, erunt tres rectæ lineæ AD DB DC inter se æquales, atque erit D circuli descripti centrum, & segmentum ABC semicirculus. si vero angulus ABD minor sit angulo BAD; constituatur ad rectam lineam BA, & ad punctum in ea datum A, angulo ABD æqualis angulus ABE intra segmentum ABC. erit E centrum in ipsa DB, atque erit ABC segmentum semicirculo majus. Circuli igitur segmento dato descriptus est circulus cujus segmentum est. Quod facere oportebat.

PROP. XXVI. THEOR.

In æqualibus circulis æquales anguli æqualibus insistant circumferentiis, sive ad centra, sive ad circumferentias insistant.

Sint æquales circuli ABC DEF, & in ipsis æquales anguli ad centra quidem BGC EHF, ad circumferentias vero BAC EDF. dico BKC circumferentiam circumferentiæ ELF æqualem esse. jungantur enim BC EF. Quoniam æquales sunt ABC DEF circuli, erunt & quæ ex centrīs æquales. duæ igitur BG GC duabus EH HF æquales sunt; & angulus ad C æqualis angulo ad H. ergo & basis



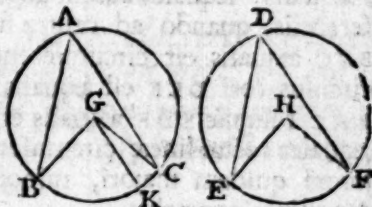
basis BC basi EF est æqualis. rursus quoniam æqualis est ^{44 primi.} angulus ad A angulo ad D , segmentum BAC simile ^{b diffin. 11.} erit segmento EDF : & sunt super æqualibus rectis lineis BC EF . quæ autem super æqualibus rectis lineis similia sunt circulorum segmenta, inter se æqualia sunt. segmentum igitur BAC segmento EDF est æquale. sed & torus ABC circulus æqualis est toti DEF . ergo & reliqua circumferentia BKC reliquæ ELF æqualis erit. In æqualibus igitur circulis æquales anguli æqualibus insistant circumferentiis, sive ad centra, sive ad circumferentias insistant. Quod oportebat demonstrare. ^{c 24. hujus.}

PROP. XXVII. THEOR.

In æqualibus circulis anguli qui æqualibus insistant circumferentiis inter se æquales sunt, sive ad centra, sive ad circumferentias insistant.

In æqualibus enim circulis ABC DEF , æqualibus circumferentiis BC EF insistant anguli ad centra quidem BGC EHF , ad circumferentias vero BAC EDF . dico angulum BGC angulo EHF , & angulum BAC angulo EDF æqualem esse.

Si quidem igitur angulus BGC æqualis sit angulo EHF , manifestum est angulum quoque BAC angulo EDF esse æqualem. sin minus,



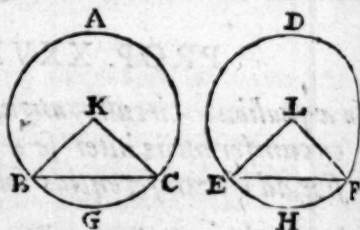
unus ipsorum est major. sit major BGC , & constituatur ad rectam lineam BG , & ad punctum in ipsa G , angulo EHF æqualis æ ^{23. primi.} angulus BGK . æquales autem anguli æqualibus insistant ^{b circumferentiis,} ^{c 26. hujus.} quando ad centra fuerint. ergo circumferentia BK æqualis est circumferentiæ EF . sed circumferentia EF æqualis est ipsi BC . ergo & BK ipsi BC est æqualis, minor majori, quod fieri non potest: non igitur inæqualis est angulus BGC angulo EHF : ergo est æqualis. atque est anguli quidem BGC dimidium angulus qui ad A ; anguli vero EHF dimidium qui ad D . angulus igitur qui ad A angulo qui ad D est æqualis. In æqualibus igitur circulis, anguli qui æqualibus insistant circumferentiis inter se æquales sunt, sive ad centra, sive ad circumferentias insistant. Quod oportebat demonstrare.

PROP.

PROP. XXVIII. THEOR.

In æqualibus circulis æquales rectæ lineæ circumferentias æquales auferunt, majorem quidem majori, minorem vero minori.

Sint æquales circuli $ABCDEF$; & in ipsis æquales rectæ lineæ BC EF , quæ circumferentias quidem BAC EDF majores auferant, circumferentias vero BGC EHF minores, dico circumferentiam BAC majorem majori circumferentia EDF , & minorem circumferentiam BGC minori EHF æqualem esse. sumantur enim centra a circulorum K L , junganturque BK KC EL LF . Quoniam circuli æquales sunt, erunt & quæ ex centris æquales b . duæ igitur BK KC sunt æquales duabus EL LF : & basis BC æqualis est basi EF , ergo angulus BKC angulo ELF est æqualis: æquales autem anguli æqualibus insunt circumferentiis, quando ad centra fuerint d . quare circumferentia BGC æqualis est circumferentiæ EHF . sed & totus ABC circulus toti DEF est æqualis. reliqua igitur circumferentia BAC reliquæ EDF æqualis erit. Ergo in æqualibus circulis æquales rectæ lineæ circumferentias æquales auferunt, majorem quidem majori, minorem vero minori. Quod demonstrare oportebat.



PROP. XXIX. THEOR.

In æqualibus circulis, æquales circumferentias æquales rectæ lineæ subtendunt.

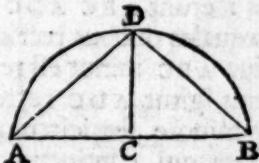
Sint æquales circuli $ABCDEF$: & in ipsis æquales arcus circumferentiæ BGC EHF , & BC EF jungantur. dico rectam lineam BC rectæ EF æqualem esse. sumantur enim centra a circulorum K L , & jungantur BK KC EL LF . quoniam igitur circumferentia BGC est æqualis circumferentiæ EHF , erit & angulus BKC angulo ELF æqualis b . & quoniam circuli $ABCDEF$ sunt æquales, & quæ ex centris æquales erunt c . duæ igitur BK KC sunt æquales duabus EL LF ; & æquales angulos continent. quare basis BC basi EF est d æqualis. In æqualibus igitur circulis æquales circumferentias æquales rectæ lineæ subtendunt. Quod oportebat demonstrare.

PROP.

PROP. XXX. PROBL.

Datam circumferentiam bifariam secare.

Sit data circumferentia ADB . oportet ADB circumferentiam bifariam secare. Jungatur AB , & in c bifariam a secetur: a 10. primi. à puncto autem c ipsi AB ad rectos angulos ducatur CD : & jungantur AD DB . quoniam igitur AC est æqualis CB , communis autem CD , duæ AC CD duabus BC CD æquales sunt: & angulus ACD æqualis angulo BCD , rectus enim uterque est: ergo basis AD basi DB est b æqualis. æquales autem rectæ lineæ circumferentias æquales auferunt, 28. hujus. quare circumferentia AD circumferentiæ BD æqualis erit. Data igitur circumferentia bifariam secta est. Quod facere oportebat.



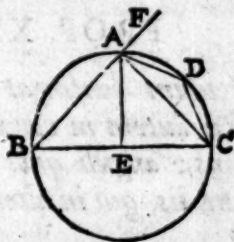
64. primi.
28. hujus.

PROP. XXXI. THEOR.

In circulo angulus qui in semicirculo rectus est, qui vero in majori segmento minor est recto, & qui in minori major recto; & insuper majoris quidem segmenti angulus recto major est, minoris vero segmenti angulus recto minor.

Sit circulus $ABCD$ cujus diameter BC , centrum autem E ; & jungantur BA AC AD DC . dico angulum quidem, qui est in semicirculo BAC rectum esse, qui vero in segmento ABC majore semicirculo, videlicet angulum ABC , minorem

esse recto, & qui est in segmento ADC minore semicirculo, hoc est angulum ADC , recto majorem. jungatur AE , & BA ad F producat. itaque quoniam BE est æqualis EA , erit & angulus EAB , angulo EBA æqualis a . rursus

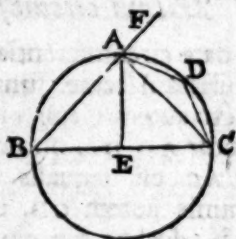


a 5. primi.

quoniam AE est æqualis EC , & angulus ACE angulo CAE æqualis a erit. totus igitur angulus BAC est æqualis duobus ABC ACB angulis. est autem, & angulus FAC extra triangulum ABC , duobus ABC ACB æqualis b . angulus igitur b 32. primi. BAC est æqualis angulo FAC ; ac propterea uterque ipsorum rectus c . quare in semicirculo BAC angulus BAC rectus c Diffn. 10. est. primi.

est. & quoniam trianguli ABC duo anguli ABC BAC duobus rectis sunt ^d minores, rectus autem BAC , erit ABC angulus recto minor, atque est in segmento ABC majore semicirculo. quod cum in circulo quadrilaterum sit $ABCD$, quadrilaterorum vero qui in circulis describuntur, anguli oppositi duobus rectis sint æquales: erunt ABC ADC anguli æquales duobus rectis, & angulus ABC minor est recto,

e 22. hujus



reliquus igitur ADC recto major erit, atque est in segmento ADC minore semicirculo. dico præterea majoris segmenti angulum qui continetur ABC circumferentia, & recta linea AC recto majorem esse; angulum vero minoris segmenti, contentum circumferentia ADC , & recta linea AC recto minorem. quod quidem perspicue apparet. quoniam angulus qui rectis lineis BA AC continetur rectus est, erit & contentus ABC circumferentia, & recta linea AC recto major, rursus quoniam angulus contentus rectis lineis CA AF rectus est, erit qui continetur recta linea CA , & ADC circumferentia minor recto. In circulo igitur angulus qui in semicirculo rectus est, qui vero in majore segmento minor est recto, & qui in minori major recto: & insuper majoris quidem segmenti angulus recto major est, minoris vero recto minor. Quod demonstrare oportebat.

Cor. Ex hoc manifestum est, si trianguli unus angulus sit æqualis duobus, eum rectum esse; propterea quod & qui deinceps est, iisdem est æqualis. quando autem anguli deinceps sunt æquales, necessario recti sunt.

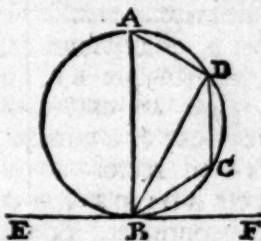
PROP. XXXII. THEOR.

Si circulum contingat quædam recta linea, à contactu autem in circulum ducatur recta linea ipsum secans; anguli quos ad contingentem facit, æquales erunt iis qui in alternis circuli segmentis consistunt.

Circulum enim $ABCD$ contingat quædam recta linea EF in B , & à puncto B ad circulum $ABCD$ ducatur recta linea BD ipsum utcumque secans. dico angulos quos BD cum EF contingente facit, æquales esse iis qui in alternis circuli segmentis consistunt. hoc est angulum FBD esse æqualem angulo qui constituitur in DAB segmento videlicet ipsi

DAB ;

DAB; angulum vero DBE æqualem angulo DCB qui in segmento DCB constituitur. ducatur enim à puncto B ipsi EF ad rectos ^a angulos BA: & in circumferentia BD sumatur quod vis punctum c; junganturque AD DC CB. Quoniam igitur circulum ABCD contingit quædam recta linea EF in puncto B: & à contactu B ad rectos angulos contingenti ducta est BA, erit in ipsa BA centrum ^b ABCD circuli; quare BA ejusdem circuli diameter est, & angulus ADB in semicirculo est ^c rectus. reliqui igitur anguli BAD ^d 31. hujus. ABD uni recto æquales sunt. sed & ABF est rectus. ergo angulus ABF æqualis ^e est angulis BAD ABD. communis auferatur ABD. reliquus igitur DBF ei qui in alterno circuli segmento consistit, videlicet angulo BAD, est æqualis. & quoniam in circulo quadrilaterum est ABCD, & anguli ejus oppositi æquales ^f sunt duobus rectis; erunt DBF ^g 22. hujus. DBE anguli angulis BAD BCD æquales. quorum BAD ostensus est æqualis ipsi DBF; ergo reliquus DBE ei qui in alterno circuli segmento DCB constituitur, videlicet ipsi DCB, æqualis erit. Si igitur circulum contingat quædam recta linea, à contactu vero in circulum ducatur recta linea ipsum secans; anguli quos facit ad contingentem, æquales erunt iis qui in alternis circuli segmentis consistunt. Quod oportebat demonstrare.

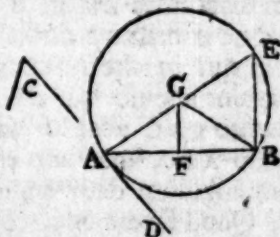


619. hujus.

PROP. XXXIII. PROBL.

Super data recta linea describere segmentum circuli, quod suscipiat angulum dato angulo rectilineo æqualem.

Sit data recta linea AB datus autem angulus rectilineus, qui ad c. itaque oportet super data recta linea AB describere segmentum circuli, quod suscipiat angulum æqualem angulo qui est ad c. Ad rectam lineam AB, & ad punctum in ea datum A, constituitur angulus BAD angulo qui est ad c æqualis ^a. & à puncto A ipsi AD ad rectos angulos ^b ducatur AE; secetur autem AB bifariam ^c in F, atque à puncto F ducatur FG ad rectos angulos ipsi AB; & GB jungatur. quoniam igitur AF est æqualis FB, communis

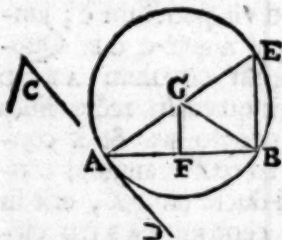


a 13. primi.

b 11. primi.

c 10. primi.

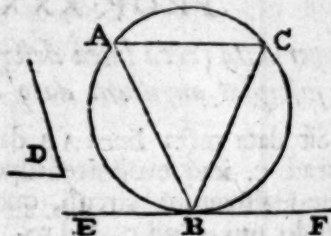
- munis autem FG , duæ AF FG duabus BF FG æquales sunt: & angulus AFG æqualis angulo GFB . ergo basis AG basi GB est ^d æqualis. itaque centro G , intervallo autem AG circulus descriptus transibit etiam per B , describatur, & sit ABE , jungaturque EB . quoniam igitur ab extremitate diametri AE , & à puncto A , ipsi AE ad rectos angulos ducta est AD ; ipsa AD circulum ^e continget. & quoniam circulum ABE contingit quædam recta linea AD , & à contactu qui est ad A , in circulum ABE ducta est recta linea AB : erit angulus DAB æqualis ^f angulo qui in alterno circuli segmento constituitur, videlicet ipsi AEB . sed angulus DAB , angulo ad C est æqualis. ergo & angulus ad C angulo AEB æqualis erit. super data igitur recta linea AB , segmentum circuli descriptum est AEB suscipiens angulum AEB dato angulo qui est ad C æqualem. Quod facere oportebat.



PROP. XXXIV. PROBL.

A dato circulo segmentum abscindere quod suscipiat angulum dato angulo rectilineo æqualem.

- Sit datus circulus ABC , datus autem angulus rectilineus qui ad D . oportet à circulo ABC segmentum abscindere, quod suscipiat angulum angulo ad D æqualem. Ducatur ^a recta linea EF circulum ABC in puncto B contingens: & ad rectam lineam EF , & ad punctum in ea B , constituatur angulus FBC angulo qui est ad D æqualis ^b. quoniam igitur circulum ABC contingit quædam recta linea EF in B puncto, & à contactu B ducta est BC , erit angulus FBC æqualis ^c ei qui in alterno circuli segmento constituitur. sed FBC angulus angulo qui ad D est æqualis. ergo & angulus in segmento BAC angulo ad D æqualis erit. A dato igitur circulo ABC , abscissum est segmentum quoddam BAC suscipiens angulum dato angulo rectilineo qui est ad D , æqualem. Quod facere oportebat.



PROP.

PROP. XXXV. THEOR.

Si in circulo duæ rectæ lineæ sese mutuo secant, rectangulum sub segmentis unius contentum æquale est ei quod sub alterius segmentis continetur.

In circulo enim $ABCD$, duæ rectæ lineæ AC BD sese mutuo in puncto E secant. dico rectangulum contentum sub AE EC æquale esse ei quod sub DE EB continetur. si AC BD per centrum transeant, ita ut E sit centrum $ABCD$ circuli; manifestum est æqualibus existentibus AE EC DE EB , & rectangulum contentum sub AE EC æquale esse ei quod sub DE EB continetur. si AC DB non transeant per centrum, sumatur centrum circuli $ABCD$ quod sit F : & ab F ad rectas lineas AC DB perpendiculares ducantur FG FH : junganturque FB FC FE . quoniam igitur recta quædam linea GF per centrum ducta rectam lineam quandam AC non ductam per centrum ad rectos angulos secat, & bifariam ipsam secabit. quare AG ipsi GC est æqualis. & quoniam recta linea AC secta est in partes æquales in puncto G , & in partes inæquales in E , erit rectangulum sub AE EC contentum, una cum ipsius EG quadrato; æquale qua-



43. huius.

45. secundi

drato ex GC . commune addatur ex GF quadratum. ergo rectangulum sub AE EC , una cum iis quæ ex EG GF quadratis, æquale est quadratis ex CG GF . sed quadratis quæ ex EG GF æquale est quadratum ex FE : quadratis vero ex CG GF æquale est quod ex FC fit quadratum. rectangulum igitur sub AE EC , unà cum quadrato ex FE , æquale est quadrato ex FC . est autem CF æqualis FB . ergo rectangulum sub AE EC , unà cum quadrato ex EF , æquale est ei quod ex FB fit quadrato. eadem ratione & rectangulum sub DE EB unà cum quadrato ex FE , æquale est quadrato ex FB . ostensum autem est & rectangulum sub AE EC , unà cum quadrato ex FE , æquale ei quod & ex FB quadrato. ergo rectangulum sub AE EC , unà cum quadrato ex FE , æquale est rectangulo sub DE EB , unà cum quadrato ex FE . commune auferatur ex FE quadratum. reliquum igitur rectangulum sub AE EC , reliquo sub DE EB rectangulo æquale erit. Quare si in circulo duæ rectæ lineæ sese mutuo secant, rectangulum sub segmentis unius contentum æquale est ei quod sub alterius segmentis continetur. Quod demonstrare oportebat.

PROP.

PROP. XXXVI. THEOR.

Si extra circulum aliquod punctum sumatur, & ab eo in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera quidem circulum secet, altera vero contingat; rectangulum quod sub tota secante, & exterius assumpta inter punctum & curvam circumferentiam continetur, æquale erit ei quod à contingente fit quadrato.

Extra circulum enim ABC sumatur aliquod punctum D , & ab eo ad dictum circulum cadant duæ rectæ lineæ DCA DB : & DCA quidem circulum ABC secet; DB vero contingat. dico rectangulum sub AD DC , quadrato quod fit ex DB æquale esse. vel igitur DCA per centrum transit, vel non transit. primum transeat per centrum circuli ABC , quod fit

18. hujus. angulus EBD rectus. itaque quoniam recta linea AC bifariam secta est in E , & ipsi adjicitur CD , rectangulum sub AD DC , una cum quadrato ex EC , æquale ϵ erit ei quod fit ex ED quadrato. æ-



66. secundi. qualis autem est CE ipsi EB , ergo rectangulum sub AD DC , una cum quadrato quod ex EB , æquale est quadrato ex ED . *47. primi* sed quadratum ex ED est æquale quadratis ϵ ipsarum EB BD , rectus enim angulus est EBD . rectangulum igitur sub AD DC , una cum quadrato ex EB , æquale est ipsarum EB BD quadratis. commune auferatur quadratum quod ex EB . ergo reliquum sub AD DC rectangulum, quadrato quod fit à contingente DB æquale erit. secundo DCA non transeat per centrum ABC circuli: sumaturque ϵ centrum E , & ad AC perpendicularis agatur EF , & jungantur EB EC ED , rectus igitur est EFD angulus. & quoniam recta linea quædam EF per centrum ducta, rectam lineam quandam AC non ductam per centrum ad rectos angulos secat, & bifariam ipsam secabit ϵ . quare AF ipsi FC est æqualis. rursus quoniam recta linea AC bifariam secta est in F , atque ipsi adjicitur CD , erit rectangulum sub AD DC , una cum quadrato ex FC , æquale ϵ quadrato quod ex FD . commune apponatur quod ex FE quadratum. rectangulum igitur sub

AD DC

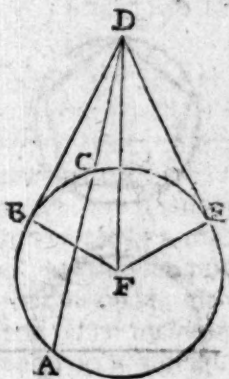
AD DC unū cum quadratis ex CF FE est æquale quadratis
ex DF FE. sed quadratis quidem ex DF FE æquale est
ex DE quadratum; etenim rectus est angulus BFD:
quadratis verò ex CF FE æquale est quadratum ex CE. 47. primi.
ergo rectangulum sub AD DC, una cum quadrato quod ex
CE, est æquale quadrato ex ED; æqualis autem est ipsi
EB; rectangulum igitur sub AD DC, una cum quadrato ex
EB, æquale est ex ED quadrato. sed quadrato ex ED æ-
qualia sunt quadrata ex EB BD, si quidem rectus est angulus
EBD. ergo rectangulum sub AD DC, una cum quadra-
to ex EB, æquale est eis quæ ex EB BD sunt quadratis.
commune auferatur quadratum ex EB. reliquum igitur
sub AD DC rectangulum quadrato quod fit ex DB æquale
erit. Si igitur extra circulum aliquod punctum sumatur, &c.
Quod oportebat demonstrare.

PROP. XXXVII. THEOR.

*Si extra circulum sumatur aliquod punctum, atque
ab eo in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum
altera quidem circulum secet, altera vero incidat:
sit autem quod sub tota secante, & exterius assum-
pta inter punctum, & curvam circumferentiam con-
tinetur rectangulum æquale ei quod ab incidente fit
quadrato; incidens linea circulum continget.*

Extra circulum enim ABC sumatur aliquod punctum D,
atque ab ipso in circulum cadant duæ rectæ lineæ DCA
DB; DCA quidem circulum secet, DB vero incidat: sitque
rectangulum sub AD DC æquale qua-
drato quod fit ex DB. dico ipsam DB
circulum ABC contingere. Ducatur enim
recta linea DE contingens circulum ABC,
& sumatur circuli ABC centrum quod
sit F, junganturque FE FB FD. ergo an-
gulus FED rectus est. & quoniam DE
circulum ABC contingit, secat autem
DCA, rectangulum sub AD DC æquale
erit quadrato ex DE. sed rectangu-
lum sub AD DC ponitur æquale qua-
drato ex DB. quadratum igitur quod
ex DE quadrato ex DB æquale erit.

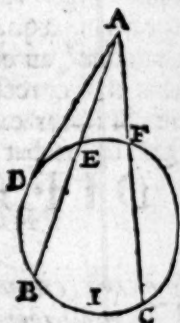
propterea linea DE ipsi DB æqualis. est autem & FE
æqualis FB. duæ igitur DE EF duabus DB BF æquales
sunt;



418. hujus.

sunt; & basis communis FD ; angulus igitur DEF est æqualis angulo DBF , rectus autem est DEF , ergo & DBF est rectus. atque est FB producta diameter: quæ vero ab extremitate diametri circuli ad rectos angulos ducitur, circulum contingit. ergo DB circulum ABC contingat necesse est. similiter demonstrabitur & si centrum sit in ipsa AC . Si igitur extra circulum sumatur aliquod punctum, &c. Quod demonstrare oportebat.

Cor. Hinc si à puncto quovis extra circulum assumpto, plures lineæ rectæ AB AC circulum secantes ducantur; rectangula comprehensa sub totis lineis AB AC , & partibus externis AE AF , inter se sunt æqualia. nam si ducatur tangens AD , erit rectangulum sub BA AE æquale quadrato ex AB ; & rectangulum sub CA AF eidem quadrato ex AD erit æquale, unde rectangula hæc æqualia erunt.



EUCLIDIS

Figur
numque
circa qu

Figur
citur, q
gure a
conting

Figur
scribi di
tus def
conting

EUCLIDIS

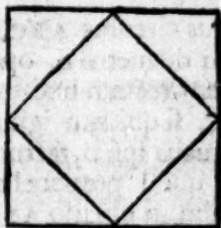
ELEMENTORUM.

LIBER QUARTUS.

DIFFINITIONES.

I

Figura rectilinea in figura rectilinea describi dicitur, quando unusquisque figuræ descriptæ angulus, unumquodque latus ejus in qua describitur, contingit.



II.

Figura similiter circa figuram describi dicitur, quando unumquodque latus descriptæ, unumquemque angulum ejus circa quam describitur, contingit.

III.

Figura rectilinea in circulo describi dicitur, quando unusquisque descriptæ figuræ angulus circuli circumferentiam contingit.



IV.

Figura rectilinea circa circulum describi dicitur, quando unumquodque latus descriptæ, circuli circumferentiam contingit.



F 2

V.

V.

Circulus similiter in figura rectilinea describi dicitur, quando circuli circumferentia unumquodque latus ejus in qua describitur, contingit.

VI.

Circulus circa figuram rectilineam describi dicitur, quando circuli circumferentia unumquemque angulum ejus circa quam describitur, contingit.

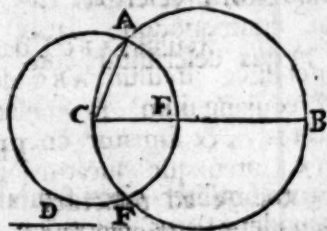
VII.

Recta linea in circulo aptari dicitur, quando ejus extrema in circuli circumferentia fuerint.

PROPOSITIO I. PROBLEMA.

In dato circulo, data rectæ lineæ quæ diametro ejus major non sit, æqualem rectam lineam aptare.

Sit datus circulus ABC , data autem recta linea non major circuli diametro D . oportet in circulo ABC rectæ lineæ D æqualem rectam lineam aptare. Ducatur circuli ABC diameter BC . si quidem igitur BC sit æqualis ipsi D , factum jam erit quod proponebatur. etenim in circulo ABC aptata est BC rectæ lineæ D æqualis. sin minus, major est BC quam D , ponaturque
 a 3. primi. • ipsi D æqualis CE : & centro quidem C intervallo autem CE circulus describatur AEF : & CA jungatur. itaque quoniam punctum C centrum est AEP circuli; erit CA ipsi CE æqualis. sed D est æqualis CE . ergo & D ipsi AC æqualis erit. in dato igitur circulo ABC data rectæ lineæ D , non majori circuli diametro, æqualis aptata est AC . Quod facere oportebat.

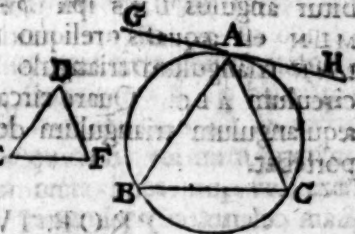


PROP. II. PROBL.

In circulo dato, dato triangulo æquiangulum triangulum describere.

Sit datus circulus ABC , datum autem triangulum DEF . oportet in ABC circulo describere triangulum triangulo DEF
 a 17. tertii. æquiangulum. ducatur recta linea GAH contingens circulum

lum ABC in puncto A: & ad rectam lineam AH, & ad punctum in ea A, angulo DEF æqualis & angulus constituitur HAC. rursus ad rectam lineam AG; & ad punctum in ipsa A, angulo DFE æqualis & constituatur angulus GAB; & BC jungantur. quoniam igitur circulum ABC contingit quædam recta HAG; à contactu autem in circulum ducta est AC: erit HAC angulus æqualis ei qui in altero circuli segmento consistit, videlicet ipsi ABC. sed HAC angulus æqualis est angulo DEF, ergo & angulus ABC angulo DEF est æqualis. eadem ratione & angulus ACB est æqualis angulo DFE. reliquis igitur BAC angulus reliquo EDF æqualis erit. ergo triangulum ABC triangulo DEF est æquiangulum, & descriptum est in circulo ABC. In dato igitur circulo dato triangulo æquiangulum triangulum descriptum est. Quod facere oportebat.



623. primi.

32. tertii.

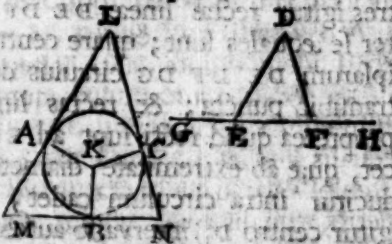
d. 2. Cor.

32. primi.

PROP. III. PROBL.

Circa datum circulum triangulo dato æquiangulum triangulum describere.

Sit datus circulus ABC, datum autem triangulum DEF. oportet circa circulum ABC describere triangulum triangulo DEF æquiangulum. Protrahatur ex utraque parte E & F ad puncta H & G, & sumatur circuli ABC centrum K: & recta linea KB utcumque ducatur: constituaturque ad rectam lineam KB, & ad punctum in ea K, angulo quidem DEG æqualis & angulus BKA, angulo autem DFH æqualis & angulus BKC, & per A, B, C puncta ducantur rectæ lineæ LAM, MBN, NCL circulum ABC contingentes.



623. primi.

Quoniam igitur circulum ABC contingunt LM, MN, NL in punctis A, B, C, à centro autem K ad A, B, C puncta ducuntur KA, KB, KC; erunt anguli ad puncta A, B, C recti & quoniam quadrilateri AMBK anguli quatuor quatuor rectis æquales sunt; etenim in duo triangula dividitur; quorum anguli KAM, KBM sunt recti; erunt reliqui AKB, AMB duobus rectis æquales. sunt autem & DEG, DEF æquales duobus rectis. anguli igitur AKB, AMB angulis DEG, DEF æquales

F 3

æquales

æquales sunt, quorum AKB ipsi DEG est æqualis. ergo reliquus AMB reliquo DEF æqualis erit. similiter demonstrabitur angulus LNB ipsi DFE æqualis. ergo & reliquus MLN est æqualis reliquo EDF . æquiangulum igitur est LMN triangulum triangulo DEF ; & descriptum est circa circulum ABC . Quare circa datum circulum triangulo dato æquiangulum triangulum descriptum est. Quod facere oportebat.

PROP. IV. PROBL.

In dato triangulo circulum describere.

Sit datum triangulum ABC , oportet in triangulo ABC circulum describere. Secentur anguli ABC BCA bifariam rectis lineis BD CD quæ conveniant inter se in D puncto: & à puncto D ad rectas lineas AB BC CA perpendiculares ducantur DE DF DG . Quoniam angulus EBD est æqualis angulo FBD , est autem & rectus BED recto BFD æqualis: erunt duo triangula EBD DBF , duos angulos duobus angulis æquales habentia, & unum latus uni lateri æquale, & utrique commune BD , quod scilicet uni æqualium angulorum subtenditur, ergo & reliqua latera reliquis lateribus æqualia habebunt, atque erit DE æqualis DF . & eadem ratione DG æqualis DF , ergo & DE ipsi DG est æqualis. tres igitur rectæ lineæ DE DF DG inter se æquales sunt; quare centro D intervallo autem unius ipsarum DE DF DG circulus descriptus etiam per reliqua transibit puncta; & rectas lineas AB BC CA continget; propterea quod recti sunt ad EFG anguli, si enim ipsas secet, quæ ab extremitate diametri circuli ad rectos angulos ducitur intra circulum cadet, quod est absurdum. non igitur centro D , intervallo autem unius ipsarum DE DF DG circulus descriptus secabit rectas lineas AB BC CA , quare ipsas continget; atque erit circulus descriptus in triangulo ABC . In dato igitur triangulo ABC circulus EFG descriptus est. Quod facere oportebat.

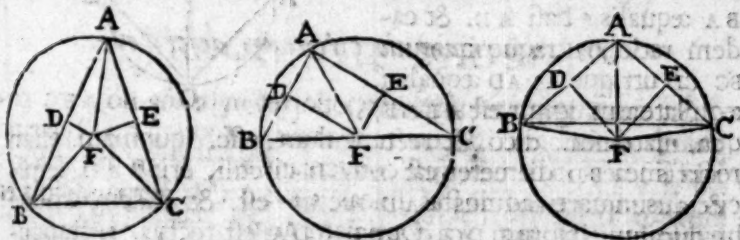


PROP.

PROP. V. THEOR.

Circa datum triangulum circulum describere.

Sit datum triangulum ABC . oportet circa datum triangulum ABC circulum describere. Secentur AB AC bifariam ^{a. 430. primi.} in D E punctis: & à punctis D E ipsis AB AC ad rectos angulos ^{b. 11. primi.} ducantur DF EF quæ quidem vel intra triangulum ABC convenient, vel in recta linea BC , vel extra ipsam. convenient primo intra triangulum in puncto F : &



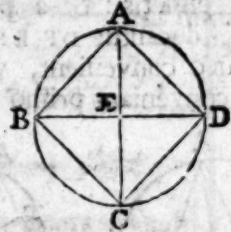
BF FC FA jungantur. quoniam igitur AD est æqualis DB , communis autem & ad rectos angulos DF ; erit basis AF basi FB æqualis ^{c. 4. primi.}. similiter ostendetur & CF æqualis FA . ergo & BF est æqualis FC . tres igitur FA FB FC inter se æquales sunt. quare centro F , intervallo autem unius ipsarum FA FB FC circulus descriptus etiam per reliqua puncta transibit: atque erit circulus descriptus circa triangulum ABC . & describatur ut ABC . secundo DF EF convenient in recta linea BC , in puncto F , ut in secunda figura, & AF jungatur. similiter demonstrabimus punctum F centrum esse circuli circa triangulum ABC descripti. postremo DF EF convenient extra triangulum ABC rursus in F puncto, ut in tertia figura: & jungantur AF FB FC . & quoniam rursus AD est æqualis DB , communis autem & ad rectos angulos DF , basis AF basi FB æqualis erit. similiter demonstrabimus & CF ipsi FA æqualem esse. quare & BF est æqualis FC . rursus igitur centro F , intervallo autem unius ipsarum FA FB FC circulus descriptus & per reliqua transibit puncta; atque erit circa triangulum ABC descriptus. Circa datum igitur triangulum circulus descriptus est. Quod facere oportebat.

Cor. Si triangulum sit rectangulum centrum circuli cadet in latus angulo recto oppositum. si acutangulum cadet centrum intra triangulum, si obtusangulum cadet extra.

PROP. VI. PROBL.

In dato circulo quadratum describere.

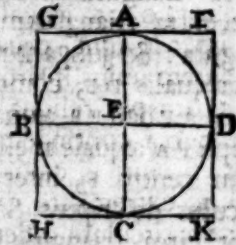
Sit datus circulus $ABCD$. oportet in $ABCD$ circulo quadratum describere. Ducantur circuli $ABCD$ diametri ad rectos angulos inter se AC BD : & AB BC CD DA jungantur. Quoniam igitur BE est æqualis ED , etenim centrum est E , communis autem, & ad rectos angulos EA ; erit basis BA æqualis AD . & eadem ratione utraque ipsarum BC CD utrique BA AD æqualis; æquilaterum igitur est $ABCD$ quadrilaterum. dico & rectangulum esse. quoniam enim recta linea BD diameter est $ABCD$ circuli, erit BAD semicirculus. quare angulus BAD rectus est. & eadem ratione unusquisque ipsorum ABC BCD CDA est rectus. rectangulum igitur est $ABCD$ quadrilaterum. ostensum autem est, & æquilaterum esse. ergo quadratum necessario erit, & descriptum est in circulo $ABCD$. in dato igitur $ABCD$ circulo quadratum $ABCD$ descriptum est. Quod facere oportebat.



PROP. VII. PROBL.

Circa datum circulum quadratum describere.

Sit datus circulus $ABCD$. oportet circa $ABCD$ circulum quadratum describere. Ducantur circuli $ABCD$ duæ diametri AC BD ad rectos inter se angulos, & per puncta A B C D ducantur circuli $ABCD$ contingentes FG GH HK KF . Quoniam igitur FG contingit circulum $ABCD$, à centro autem E ad contactum, qui est A , ducitur EA ; erunt $\angle$ anguli ad A recti. eadem ratione, & anguli ad puncta B C D recti sunt. & quoniam angulus AEB rectus est, est autem & rectus EBG ; erit GH ipsi AC parallela. eadem ratione, & AC parallela est FK . similiter demonstrabimus & utramque ipsarum GF HK ipsi BD parallelam esse. quare & GF est parallela HK . parallelogramma igitur sunt GK GC AK FB . BK , ac propterea GF quidem est æqualis HK , GH vero ipsi FK . & quoniam AC æqualis est BD ; sed AC quidem utrique ipsarum



ipsarum $GHFK$ est $\angle$ æqualis; BD vero æqualis utrique GF HK , & utraque $GHFK$ utrique $GFHK$ æqualis erit. æquilaterum igitur est $FGHK$ quadrilaterum. dico & rectangulum esse. quoniam enim parallelogrammum est $GBEA$, atque est rectus AEB angulus, & ipse AGB rectus erit. similiter demonstrabimus angulos etiam ad puncta HKF rectos esse. rectangulum igitur est quadrilaterum $FGHK$. demonstratum autem est & æquilaterum. ergo quadratum sit necesse est, & descriptum est circa circulum $ABCD$. Circa datum igitur circulum quadratum descriptum est. Quod facere oportebat.

PROP. VIII. PROBL.

In dato quadrato circulum describere.

Sit datum quadratum $ABCD$. oportet in quadrato $ABCD$ circulum describere. Secetur utraque ipsarum AB AD bisariam $\angle$ in punctis FE . & per E quidem alterutri ipsarum $ABCD$ parallela $\angle$ ducatur EH : per F vero ducatur FK parallela $\angle$ alterutri AD BC . parallelogrammum igitur est unumquodque ipsorum AK KB AH HD AG GC BG GD : & latera ipsorum quæ ex opposito, sunt æqualia $\angle$. & quoniam DA est æqualis AB ; & ipsius quidem AD dimidium est AE ; ipsius vero AB dimidium AF ; erit AE ipsi AF æqualis. quare & opposita latera æqualia sunt. ergo FG est æqualis GE . similiter demonstrabimus, & utramque ipsarum GH GK utrique FG GE æqualem esse. quatuor igitur GE GF GH GK inter se sunt æquales. itaque centro quidem G , intervallo autem unius ipsarum GE GF GH GK circulus descriptus etiam per reliqua transibit puncta, & rectas lineas AB BC CD DA continget; propterea quod anguli ad $EFHK$ recti sunt. si enim circulus secabit rectas lineas AB BC CD DA , quæ ab extremitate diametri circuli ad rectos angulos ducitur infra circulum cadet; quod $\angle$ est absurdum. non igitur centro quidem G intervallo autem unius ipsarum GE GF GH GK circulus descriptus rectas lineas AB BC CD DA secabit. quare ipsas necessario continget; atque erit descriptus in quadrato $ABCD$. In dato igitur quadrato circulus descriptus est. Quod facere oportebat.



PROP.

PROP. IX. PROBL.

Circa datum quadratum circulum describere.

Sit datum quadratum $ABCD$. oportet circa $ABCD$ quadratum circulum describere. Jungantur enim AC BD , quæ se invicem in puncto E secant. & quoniam DA est æqualis AB , communis autem AC ; duæ DA AC duabus BA AC æquales sunt; & basis DC æqualis basi BC ; erit angulus DAC angulo BAC æqualis ^a. angulus igitur DAB bifariam sectus est recta linea AC . similiter demonstrabimus unumquemque angulorum ABC BCD CDA rectis lineis AC DB bifariam sectum esse. quoniam igitur angulus DAB angulo ABC est æqualis. atque est anguli quidem DAB dimidium angulus EAB , anguli vero ABC dimidium EBA ; & EAB angulus angulo EBA æqualis erit. quare & latus EA lateri EB est ^b æquale. similiter demonstrabimus & utramque rectarum linearum EC ED utrique EA EB æqualem esse. ergo quatuor rectæ lineæ EA EB EC ED inter se sunt æquales. centro igitur E , intervallo autem unius ipsarum EA EB EC ED circulus descriptus etiam per reliqua puncta transibit; atque erit descriptus circa $ABCD$ quadratum. describatur ut $ABCD$. Circa datum igitur quadratum circulus descriptus est. Quod facere oportebat.



PROP. X. PROBL.

Isoceles triangulum constituere, habens utrumque angulorum qui sunt ad basim, duplum reliqui.

Exponatur recta quædam recta linea AB , & secetur in puncto, ita ut rectangulum contentum sub AB BC æquale ^a sit ei quod ex CA describitur quadrato: & centro quidem A , intervallo autem AB circulus describatur BDE ; apteturque in BDE circulo recta linea BD æqualis ^b ipsi AC quæ non est major diametro circuli BDE : & junctis DA DC , circa ADC triangulum ^c circulus ACD describatur. itaque quoniam rectangulum ABC æquale est quadrato quod fit ex ^a AC

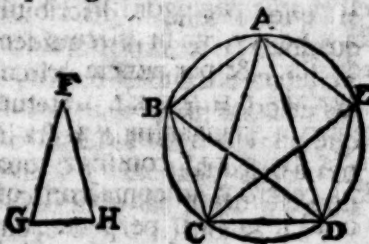


AC; æqualis autem est AC ipsi BD: erit sub AB BC rectangulum quadrato ex BD æquale. & quoniam extra circum AC D sumptum est aliquod punctum B, & à puncto B in circum AC D cadunt duæ rectæ linæ BCA BD, quarum altera quidem secat, altera vero incidit; atque est rectangulum sub AB BC æquale quadrato ex BD: recta linea BD circum AC D continget. quoniam igitur BD con-^{37. tertii.}tingit, & à contactu ad D ducta est DC; erit BDC angulus æqualis ei qui in alterno circuli segmento constituitur, videlicet angulo DAC. quod cum angulus BDC æqualis sit ipsi DAC, communis apponatur CDA totus igitur BDA est æqualis duobus angulis CDA DAC. sed ipsis CDA DAC exterior angulus BCD est æqualis. ergo & BDA æ-^{32. tertii.}qualis est ipsi BCD. sed BDA angulus est æqualis angulo CBD, quoniam & latus AD lateri AB est æquale. ergo & DBA ipsi BCD æqualis erit. tres igitur anguli BDA DBA BCD inter se æquales sunt. & quoniam angulus DBC æqualis est angulo BCD, & latus BD lateri DC est æquale. sed BD^{32. primi.} ponitur æqualis ipsi CA. ergo & CA est æqualis CD. quare & angulus CDA æqualis est angulo DAC. anguli igitur CDA DAC simul sumpti ipsius anguli DAC duplices sunt. est autem & BCD angulus angulis CDA DAC æqualis; ergo & BCD duplex est ipsius DAC. sed BCD est æqualis alterutri ipsorum BDA DBA. quare & uterque BDA DBA ipsius DAB est duplex. Isosceles igitur triangulum constitutum est ADB habens utrumque eorum angulorum qui sunt ad basim, duplum reliqui. Quod facere oportebat.

PROP. XI. PROBL.

In dato circulo pentagonum æquilaterum & æquiangulum describere.

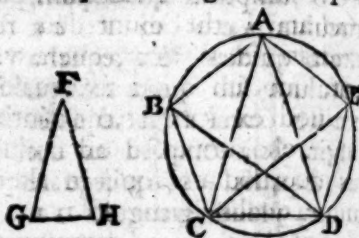
Sit datus circulus ABCDE. oportet in ABCDE circulo pentagonum æquilaterum & æquiangulum describere. Exponatur triangulum isosceles FGH habens utrumque eorum qui sunt ad basim GH angulorum, duplum anguli qui est ad F: & describatur in circulo ABCDE triangulo FGH æquiangulum triangulum ACD, ita ut angulo quidem qui est ad F æqualis sit angulus CAD; utrique vero ipsorum qui ad GH, sit æqualis uterque ACD CDA. & uterque



a 10. hujus.

b 1. hujus.

uterque igitur ACD CDA , anguli CAD est duplus. secetur
 e 9. primi. uterque ipsorum ACD CDA bifariam rectis lineis CE DB :
 & AB BC CD DE EA jungantur. quoniam igitur uterque
 ipsorum ACD CDA duplus
 est ipsius CAD , & secti sunt
 bifariam rectis lineis CE DB ,
 quinque anguli DAC ACE
 ECD CDB BDA inter se sunt
 æquales. æquales autem an-
 guli in æqualibus circumfe-
 rentiis insuntur. quinque
 4 16. terti. igitur circumferentiæ AB BC CD DE EA æquales sunt in-
 ter se. sed æquales circumferentias æquales rectæ lineæ
 4 29. terti. subtendunt. ergo & quinque rectæ lineæ AB BC CD DE
 EA inter se æquales sunt. æquilaterum igitur est $ABCDE$
 pentagonum. dico & æquiangulum esse. quoniam enim cir-
 cumferentia AB æqualis est circumferentiæ DE , communis
 apponatur BCD . tota igitur $ABCD$ circumferentia toti cir-
 cumferentiæ $EDCB$ est æqualis, & in circumferentia qui-
 dem $ABCD$ insistit angulus AED , in circumferentia vero
 $EDCB$ insistit BAE . ergo & BAE angulus est æqualis an-
 gulo AED . eadem ratione & uniusquisque angulorum ABC
 BCD CDE unicuique ipsorum BAE AED est æqualis. æ-
 quiangulum igitur est $ABCDE$ pentagonum: ostensum au-
 tem est & æquilaterum esse. Quare in dato circulo penta-
 gonum æquilaterum, & æquiangulum descriptum est. Quod
 facere oportebat.



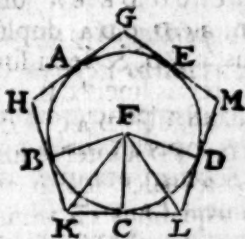
PROP. XII. PROBL.

*Circa datum circulum pentagonum æquilaterum & æ-
 quiangulum describere.*

Sit datus circulus $ABCDE$. oportet circa circulum $ABCDE$
 pentagonum æquilaterum & æquiangulum describere. In-
 telligantur pentagoni in circulo descripti angulorum pun-
 cta $ABCDE$, ita ut circumferentiæ AB BC CD DE EA sint
 æquales; & per puncta $ABCDE$ ducantur circulum con-
 tingentes GH HK KL LM MG , & sumpto circuli $ABCDE$
 centro F , jungantur FB FK FC FL FD . quoniam igitur
 recta linea KL contingit circulum $ABCDE$ in puncto C ,
 & a centro F ad contactum qui est ad C ducta est FC , erit
 4 18. terti. FC ad ipsam KL perpendicularis. rectus igitur est uterque
 angulorum qui sunt ad C . eadem ratione & anguli qui ad
 puncta B D recti sunt. & quoniam rectus angulus est FCK ,
 quadra-

quadratum quod fit ex FK æquale d est quadratis ex FC d 47. primi.
 CK . & ob eandem causam quadratis ex FB BK æqua-

le est ex FK quadratum.
 quadrata igitur ex FC CK
 quadratis ex FB BK æqualia
 sunt, quorum quod ex FC
 ei quod ex FB est æquale.
 ergo reliquum quod ex CK
 reliquo quod ex BK æquale
 erit. æqualis igitur est BK



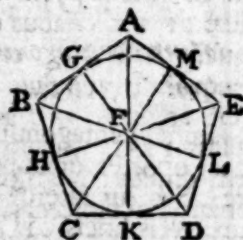
ipfi CK . & quoniam FB est æqualis FC , communis autem
 FK , duæ BF FK duabus CF FK æquales sunt, & basis BK
 est æqualis basi KC ; erit angulus BFK angulo FKC . d 5. primi.
 KFC æqualis, angulus vero BKF angulo FKC . duplus
 igitur est angulus BFC anguli KFC , & angulus BKC du-
 plus ipsius FKC . eadem ratione, & angulus CFD anguli
 CFL est duplus: angulus vero CLD duplus anguli CLF .
 & quoniam circumferentia BC circumferentiæ CD est æqua-
 lis, & angulus BFC angulo CFD æqualis f erit, atque est f 27. tertii.
 angulus quidem BFC anguli KFC duplus: angulus vero
 DFC duplus ipsius LFC æqualis. igitur est angulus KFC
 angulo CFL . itaque duo triangula sunt FKC FLC , duos
 angulos duobus angulis æquales habentia, alterum alteri, &
 unum latus uni lateri æquale quod ipsis commune est FC :
 ergo & reliqua latera reliquis lateribus æqualia habebunt g 16. primi.
 & reliquum angulum reliquo angulo æqualem. recta igitur
 linea KC est æqualis rectæ CL , & angulus FKC angulo FLC .
 & quoniam KC est æqualis CL , erit KL ipsius KC dupla.
 eadem ratione, & HK ipsius BK dupla ostendetur. rursus
 quoniam BK ostensa est æqualis ipsi KC : atque est KL qui-
 dem dupla KC , HK vero ipsius BK dupla: erit HK ipsi
 KL æqualis. similiter & unaquæque ipsarum GH GM ML
 ostendetur æqualis utrique HK KL . æquilaterum igitur est
 $GHKLM$ pentagonum. dico etiam æquiangulum esse. quo-
 niam enim angulus FKC est æqualis angulo FLC : & osten-
 sus est angulus HKL duplus ipsius FKC ; ipsius vero FLC
 duplus KLM : erit & HKL angulus angulo KLM æqualis.
 simili ratione ostendetur & utriusque ipsorum KHG HGM
 GML utrique HKL KLM æqualis. quinque igitur anguli GHK
 HKL KLM LMG MGH inter se æquales sunt. ergo æqui-
 angulum est $GHKLM$ pentagonum. ostensum autem est
 etiam æquilaterum esse: & descriptum est circa $ABCDE$
 circulum. Quod facere oportebat.

PROP.

PROP. XIII. PROBL.

In dato pentagono, quod æquilaterum & æquiangulum sit circulum describere.

- 9. primi. Sit datum pentagonum æquilaterum & æquiangulum ABCDE. oportet in ABCDE pentagono circulum describere. Secetur uterque angulorum BCD CDE bifariam rectis lineis CF DF; & à puncto F in quo conveniunt inter se CF DF ducantur rectæ lineæ FB FA FE. Quoniam igitur BC est æqualis CD, communis autem CF, duæ BC CF, duabus DC CF æquales sunt, & angulus BCF est æqualis angulo DCF. basis igitur BF basi FD est æqualis, & BFC triangulum æquale triangulo DCF, & reliqui anguli reliquis angulis æquales quibus æqualia latera subtenduntur; angulus igitur CBF angulo CDF æqualis erit. & quoniam angulus CDE anguli CDF est duplus, & angulus quidem CDE angulo ABC æqualis, angulus vero CDF angulo CBF æqualis; erit & CBA angulus duplus anguli CBF; ac propterea angulus ABF angulo FBC æqualis. angulus igitur ABC bifariam sectus est recta linea BF. similiter demonstrabitur unumquemque angulorum BAE AED rectis lineis AF FE bifariam sectum esse. à puncto F ad rectas lineas AB BC CD DE EA ducantur
- 12. primi. • perpendiculares FG FH FK FL FM. & quoniam angulus HCF est æqualis angulo KCF; est autem & rectus FHC recto FKC æqualis: erunt duo triangula FHC FKC, duos angulos duobus angulis æquales habentia, & unum laterum uni lateri æquale, commune scilicet utrique FC quod uni æqualium angulorum subtenditur. ergo & reliqua latera reliquis lateribus æqualia habebunt, atque erit perpendicularis FH perpendiculari FK æqualis. similiter ostendetur & unaqueque ipsarum FL FM FG æqualis utrique FH FK. quinque igitur rectæ lineæ FG FH FK FL FM inter se æquales sunt. quare centro F intervallo autem unius ipsarum FG FH FK FL FM, circulus descriptus etiam per reliqua transibit puncta, & rectas lineas AB BC CD DE EA continget; propterea quod anguli ad GHKLM recti sunt. si enim non continget, sed ipsas secet, quæ ab extremitate diametri circuli ad rectos angulos ducitur, intra circulum cadet,
- 16. tertii. quod absurdum esse ostensum est. non igitur centro F, &



intervallo uno ipsorum punctorum GHKLM circulus descriptus rectas lineas AB BC CD DE EA secabit. quare ipsas contingat necesse est. describatur ut GHKLM. In dato igitur pentagono quod est æquilaterum, & æquiangulum circulus descriptus est. Quod facere oportebat.

Cor. Si duo anguli proximi figuræ æquilateræ & æquiangularæ bisecentur, & à puncto in quo coeunt lineæ angulum bisecantes, ducantur rectæ lineæ ad reliquos figuræ angulos, omnes anguli figuræ erunt bisecti.

PROP. XIV. PROBL.

Circa datum pentagonum quod æquilaterum & æquiangulum sit, circulum describere.

Sit datum pentagonum æquilaterum & æquiangulum ABCDE. oportet circa pentagonum ABCDE circulum describere. Secetur uterque ipsorum BCD CDE angulorum, bisariam rectis lineis CF FD :

& à puncto F in quo conveniunt rectæ lineæ, ad puncta BAE ducantur FB FA FE. & unusquisque angulorum CBA BAE AED rectis lineis BF FA FE bisariam a sectus erit. & quoniam angulus BCD angulo



a Cor. præcedente.

CDE est æqualis; atqui est anguli quidem BCD dimidium angulus FCD, anguli vero CDE dimidium CDF; erit & FCD angulus æqualis angulo FDC, quare & latus CF lateri FD est æquale. similiter demonstrabitur & una quæque ipsarum FB FA FE æqualis unicuique FC FD. quinque igitur rectæ lineæ FA FB FC FD FE inter se æquales sunt. ergo centro F. & intervallo unius ipsarum FA FB FC FD FE, circulus descriptus etiam per reliqua transibit puncta: atque erit descriptus circa pentagonum ABCDE quod æquilaterum est & æquiangulum. describatur, & sit ABCDE. Circa datum igitur pentagonum æquilaterum & æquiangulum circulus descriptus est. Quod facere oportebat.

PROP. XV. PROBL.

In dato circulo hexagonum æquilaterum, & æquiangulum describere.

Sit datus circulus ABCDEF. oportet in circulo ABCDEF hexagonum æquilaterum, & æquiangulum describere. Ducatur

Ducatur circuli $ABCDEF$ diameter AD , sumaturque centrum circuli G ; & centro quidem D , intervallo autem DG circulus describatur $EGCH$, junctæ EG CG ad puncta B F producantur, & jungantur AB BC CD DE EF FA . dico hexagonum $ABCDEF$ æquilaterum & æquiangulum esse. Quoniam enim G punctum centrum est $ABCDEF$ circuli, erit GE ipsi GD æqualis. rursus quoniam D centrum est circuli $EGCH$, erit DE æqualis DG : sed GE ipsi GD æqualis ostensa est. ergo GE ipsi ED est æqualis. æquilaterum igitur est EGD triangulum, ideoque tres ipsius anguli EGD GDE DEG inter se æquales sunt, & sunt trianguli tres anguli æqua-



a Cor. 5.
primi.

b 32. primi.

c 13. primi

d 18. primi.

e 26. tertii.

f 29. tertii.

g 27. tertii.

les ^b duobus rectis. angulus igitur EGD duorum rectorum tertia pars est. similiter ostendetur & DGC duorum rectorum tertia pars, & quoniam recta linea CG super rectam EB insistens, angulos qui deinceps sunt EGC CGB duobus rectis æquales efficit; erit & reliquus CGE tertia pars duorum rectorum. anguli igitur EGD DGC CGE inter se sunt æquales. & qui ipsi ad verticem sunt anguli BGA AGF FGE æquales ^d sunt angulis EGD DGC CGE . quare sex anguli EGD DGC CGE BGA AGF FGE inter se æquales sunt. sed æquales anguli æqualibus circumferentiis insistant ^e. sex igitur circumferentiæ AB BC CD DE EF FA inter se sunt æquales. æquales autem circumferentias æquales ^f rectæ lineæ subtendunt. ergo & sex rectæ lineæ inter se æquales sint necesse est, ac propterea æquilaterum est $ABCDEF$ hexagonum. dico & æquiangulum esse. quoniam enim circumferentia AF circumferentiæ ED est æqualis, communis apponatur circumferentia ABC tota igitur $FABCD$ circumferentia æqualis est toti circumferentiæ $EDCBA$. & circumferentiæ quidem $FABCD$ angulus FED insitit, circumferentiæ vero $EDCBA$ insitit angulus AFE . angulus igitur AFE angulo DEF est, æqualis. similiter ostenduntur & reliqui anguli hexagoni $ABCDEF$, figillatim æquales utrique ipsorum AFE FED . ergo æquiangulum est $ABCDEF$ hexagonum. ostensum autem est & æquilaterum esse: & descriptum est circulo $ABCDEF$. In dato igitur circulo hexagonum æquilaterum, & æquiangulum descriptum est. Quod facere oportebat.

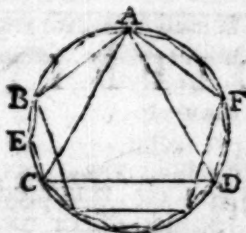
Ex hoc manifestum est hexagoni latus, ei quæ est ex centro circuli æquale esse. & si per puncta $ABCDEF$ contingentes circulum ducamus, circa circulum describetur hexa-

hexagonum æquilaterum & æquiangulum, consequenter iis quæ in pentagono dicta sunt : & præterea similiter in dato hexagono circulum inscribemus, & circumscribemus. Quod facere oportebat.

PROP. XVI. PROBL.

In dato circulo quindecagonum æquilaterum & æquiangulum describere.

Sit datus circulus $ABCD$. oportet in $ABCD$ circulo quindecagonum æquilaterum & æquiangulum describere. Sit AC latus trianguli quidem æquilateri in ipso circulo $ABCD$ descripti, pentagoni vero æquilateri latus AB . quarum igitur partium est $AB C D F$ circulus quindecim, earum circumferentia quidem ABC , tertia existens circuli, erit quinque; circumferentia vero AB , quæ quinta est circuli, erit trium. ergo reliqua BC est duarum. secetur BC bifariam in puncto E . quare utraque ipsarum $BE EC$ circumferentiarum, quintadecima pars est $ABCD$ circuli. si igitur jungentes $BE EC$, æquales ipsis in continuum rectas lineas in circulo $ABCD$ aptemus, in ipso quindecagonum æquilaterum & æquiangulum descriptum erit. Quod facere oportebat.



Similiter autem iis quæ dicta sunt in pentagono, si per circuli divisiones, contingentes circulum ducamus, circa ipsum describetur quindecagonum æquilaterum & æquiangulum. & insuper dato quindecagono æquilatero & æquiangolo circulum inscribemus, & circumscribemus.

EUCCLIDIS

ELEMENTORUM.

LIBER QUINTUS.

DIFFINITIONES.

I.

Pars est magnitudo magnitudinis, minor majoris, quando minor maiorem metitur.

II.

Multiplex est major minoris, quando maiorem minor metitur.

III.

Proportio seu ratio est duarum magnitudinem ejusdem generis, secundum quantitatem, mutua quædam habitudo.

IV.

Proportionem habere inter se magnitudines dicuntur, quæ multiplicatæ se invicem superare possunt.

V.

In eadem proportionem magnitudines esse dicuntur, prima ad secundam & tertia ad quartam, quando primæ & tertiæ æque multiplices, secundæ & quartæ æque multiplices, juxta quamvis multiplicationem, utraque utramque, vel una superant, vel una æquales sunt, vel una deficiunt, inter se comparatæ.

VI.

Magnitudines quæ eandem proportionem habent, proportionales vocentur.

VII.

VII.

Quando autem æque multiplicium, multiplex quidem primæ superaverit multiplicem secundæ, multiplex vero tertiæ non superaverit multiplicem quartæ, tunc prima ad secundam majorem proportionem habere dicitur quam tertia ad quartam.

VIII.

Analogia est proportionum similitudo.

IX.

Analogia vero in tribus terminis ad minimum consistit.

X.

Quando tres magnitudines proportionales sunt, prima ad tertiam duplicatam proportionem habere dicitur ejus quam habet ad secundam.

XI.

Quando autem quatuor magnitudines sunt proportionales, prima ad quartam triplicatam habere proportionem dicitur ejus quam habet ad secundam, & semper deinceps, una amplius, quoad analogia processerit.

XII.

Homologæ, vel similis rationis magnitudines, dicuntur antecedentes quidem antecedentibus, consequentes vero consequentibus.

XIII.

Alterna seu permutata ratio est sumptio antecedentis ad antecedentem & consequentis ad consequentem.

XIV.

Inversa ratio est sumptio consequentis ut antecedentis, ad antecedentem, ut ad consequentem.

XV.

Compositio rationis est sumptio antecedentis una, cum consequente, tanquam unius, ad ipsam consequentem.

XVI.

Divisio rationis est sumptio excessus quo antecedens superat consequentem, ad ipsam consequentem.

G 2

XVII.

XVII.

Conversio rationis est sumptio antecedentis ad excessum quo antecedens ipsam consequentem superat.

XVIII.

Ex æquo sive ex æqualitate ratio est, cum plures magnitudines extiterint, & aliæ ipsis numero æquales, quæ binæ sumantur & in eadem proportionem, fueritque ut in primis magnitudinibus prima ad ultimam, ita in secundis magnitudinibus prima ad ultimam: vel aliter, est sumptio extremarum per subtractionem mediarum.

XIX.

Ordinata proportio est quando fuerit ut antecedens ad consequentem, ita antecedens ad consequentem; ut autem consequens ad aliam quampiam, ita consequens ad aliam quampiam.

XX.

Perturbata vero proportio est quando tribus existentibus magnitudinibus, & aliis ipsis numero æqualibus, fuerit ut in primis magnitudinibus antecedens ad consequentem, ita in secundis magnitudinibus antecedens ad consequentem, ut autem in primis magnitudinibus consequens ad aliam quampiam, ita in secundis alia quampiam ad antecedentem.

A X I O M A T A.

I.

Ejisdem sive æqualium æque multiplices inter se æquales sunt.

II.

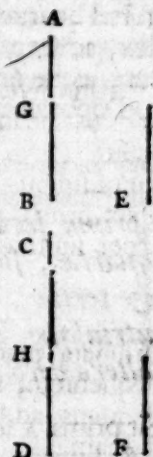
Quarum eadem æque multiplex est, vel quarum æquales sunt æque multiplices, & ipsæ inter se sunt æquales.

PROPOSITIO I. THEOREMA.

Si fuerint quotcunque magnitudines quotcunque magnitudinum, æqualium numero, singulæ singularum æque multiplices, quotuplex est una magnitudo unius, totuplices erunt & omnes omnium.

Sint quotcunque magnitudines $ABCD$, quotcunque magnitudinum E F , æqualium numero, singulæ singularum æque mul-

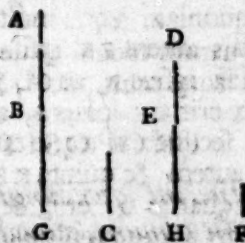
multiplices. dico quotuplex est AB ipsius E , totuplices esse & $ABCD$ simul ipsarum EF simul. Quoniam enim AB æque
multiplex est ipsius E , ac CD ipsius F ; quot
magnitudines sunt in AB , æquales ipsi E ,
tot erunt & in CD æquales ipsi F . dividatur
 AB quidem in partes ipsi E æquales, quæ
sint $AGGB$; & CD dividatur in partes æ-
quales ipsi F , videlicet $CHHD$. erit igitur
multitudo partium $CHHD$ æqualis multi-
tudini ipsarum $AGGB$. & quoniam AG est
æqualis E , & CH æqualis F ; erunt & AG
 CH æquales ipsis E F . eadem ratione quo-
niam GB est æqualis E , & HD ipsi F ; erunt
 $GBHD$ æquales ipsis E F . quot igitur sunt
in AB æquales ipsi E , tot sunt & in AB
 CD æquales ipsis E F . ergo quotuplex est AB
ipsius E , totuplices erunt & $ABCD$ simul
ipsarum E F simul. Si igitur fuerint quotcun-
que magnitudines quotcunque magnitudi-
num, æqualium numero, singulæ singularum æque multiplices,
quotuplex est una magnitudo unius, totuplices erunt &
omnes omnium. Quod demonstrare oportebat.



PROP. II. THEOR.

*Si prima secundæ æque multiplex fuerit ac tertia
quartæ, fuerit autem & quinta secundæ æque mul-
tiplex ac sexta quartæ; erit etiam composita prima
cum quinta secundæ æque multiplex ac tertia cum
sexta quartæ.*

Sit prima AB secundæ C æque multiplex, ac tertia DE
quartæ F . sit autem & quinta BG
secundæ C æque multiplex, ac
sexta EH quartæ F . dico & compo-
sitam primam cum quinta scil. AG
secundæ C æque multiplicem esse,
ac tertiam cum sexta sc. DH quar-
tæ F . Quoniam enim AB æque mul-
tiplex est C , ac DE ipsius F ; quot
magnitudines sunt in AB æquales
 C , tot erunt & in DE æquales F . eadem ratione & quot
sunt in BG æquales C , tot & in EH erunt æquales F . quot
igitur sunt in tota AG æquales C , tot erunt & in tota DH
æquales F . ergo quotuplex est AG ipsius C , totuplex est &
 DH



G 3

DH

DH ipsius F. & composita igitur prima cum quinta AG secundæ C æque multiplex erit, ac tertia cum sexta DH quartæ F: quare si prima secundæ æque multiplex fuerit, ac tertia quartæ, fuerit autem & quinta secundæ æque multiplex, ac sexta quartæ; erit composita quoque prima, cum quinta æque multiplex secundæ, ac tertia, cum sexta quartæ. Quod oportebat demonstrare.

PROP. III. THEOR.

Si prima secundæ æque multiplex fuerit ac tertia quartæ; sumantur autem æque multiplices primæ & tertiæ; erit &, ex æquali, sumptarum utraque utriusque æque multiplex, altera quidem secundæ, altera vero quartæ.

Sit prima A secundæ B æque multiplex ac tertia C quartæ D: & sumantur ipsarum A C æque multiplices EF GH. dico EF æque multiplicem esse ipsius B, ac GH ipsius D. Quoniam enim EF æque multiplex est ipsius A, ac GH ipsius C; quot magnitudines sunt in EF æquales A, tot erunt & in GH æquales C. dividatur EF quidem in magnitudines ipsi A æquales EK KF; GH vero dividatur in magnitudines æquales C, videlicet GL LH. erit igitur ipsarum EK KF multitudo æqualis multitudini ipsarum GL LH. & quoniam æque multiplex est A ipsius B ac C ipsius D: æqualis autem EK ipsi A, & GL ipsi C; erit EK æque multiplex ipsius B, ac GL ipsius D. eadem ratione æque multiplex erit KF ipsius B, ac LH ipsius D. quoniam igitur prima EK secundæ B æque multiplex est, ac tertia GL quartæ D; est autem & quinta KF secundæ B æque multiplex ac sexta LH quartæ D: erit & composita prima cum quinta EF, secundæ B æque multiplex, ac tertia cum sexta GH, quartæ D. Si igitur prima secundæ æque fuerit multiplex ac tertia quartæ, sumantur autem primæ & tertiæ æque multiplices: erit &, ex æquali, sumptarum utraque utriusque æque multiplex, altera quidem secundæ, altera vero quartæ. Quod ostendisse oportuit.

¶ hujus.

PROP.

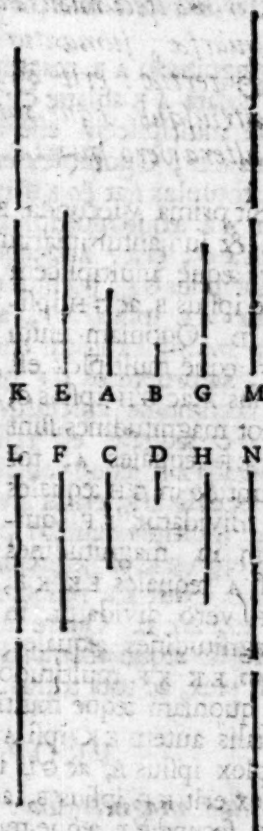
PROP. IV. THEOR.

Si prima ad secundam eandem habeat proportionem quam tertia ad quartam: & æque multiplices primæ & tertiæ ad æque multiplices secundæ & quartæ, juxta quamvis multiplicationem, eandem proportionem habebunt, inter se comparatæ.

Prima A ad secundam B eandem proportionem habeat quam tertia C ad quartam D: & sumantur ipsarum quidem A C utcumque æque multiplices E F; ipsarum vero B D aliæ utcumque æque multiplices G H. dico E ad G ita esse ut F ad H. Sumantur rursus ipsarum E F æque multiplices K L, & ipsarum G H æque multiplices M N. quoniam igitur E æque multiplex est ipsius A, atque F ipsius C; sumuntur autem ipsarum E F æque multiplices K L: erit K æque multiplex ipsius A, atque L ipsius C. eadem ratione M æque multiplex erit ipsius B, atque N ipsius D. & quoniam est ut A ad B ita C ad D. sumptæ autem sunt ipsarum A C æque multiplices K L; & ipsarum B D aliæ utcumque æque multiplices M N: si K superat M, superabit & L ipsam N; & si æqualis æqualis; & si minor minor. suntque K L quidem ipsarum E F æque multiplices; M N vero ipsarum G H aliæ utcumque æque multiplices. ut igitur E ad G ita erit F ad H. quare si prima ad secundam eandem habeat proportionem quam tertia ad quartam, & æque multiplices primæ ac tertiæ ad æque multiplices secundæ ac quartæ, juxta quamvis multiplicationem, eandem proportionem habebunt, inter se comparatæ. Quod demonstrare oportebat.

Quoniam igitur demonstratum est si K superat M, & L ipsam N superare; & si æqualis, æqualem esse, & si minor, minorem:

G 4



a 3. hujus.

b 5. Diffin. hujus.

c 5. Diffin.

e.g. Diffin.

minorem : constat etiam si M superat K , & N superare ipsam L ; & si æqualis, æqualem esse; & si minor, minorem; ac propterea ut G ad E ita esse H ad F .

Cor. Ex hoc manifestum est si quatuor magnitudines sint proportionales, & inverse proportionales esse.

PROP. V. THEOR.

Si magnitudo magnitudinis æque multiplex sit atque ablata ablatæ, & reliqua reliquæ æque multiplex erit ac tota totius.

a. i. hujus.

a. 2. Axiom. hujus.

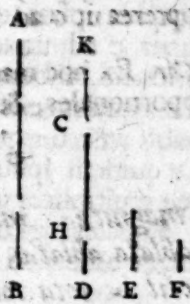
Magnitudo AB magnitudinis CD æque multiplex sit atque ablata AE ablatæ CF . dico & reliquam EB reliquæ FD æque multiplicem esse atque totam AB totius CD ; Quotuplex enim est AE ipsius CF , totuplex fiat & EB ipsius CG . & quoniam AE æque multiplex est CF atque EB ipsius CG ; erit AE æque multiplex CF , ac AB ipsius GF ; ponitur autem æque multiplex AE ipsius CF , ac AB ipsius CD . æque multiplex igitur est AB utriusque GF CD ; ac propterea GF ipsi CD est æqualis. communis auferatur CF . reliqua igitur GC æqualis est reliquæ DF . itaque quoniam AE æque multiplex est CF , ac EB ipsius CG , estque CG æqualis DF ; erit AE æque multiplex CF , ac EB ipsius FD . æque multiplex autem ponitur AE ipsius CF , ac AB ipsius CD . ergo EB est æque multiplex FD , ac AB ipsius CD . & reliqua igitur EB reliquæ FD æque multiplex est, atque tota AB totius CD . Quare si magnitudo magnitudinis æque multiplex sit atque ablata ablatæ, & reliqua reliquæ æque erit multiplex, ac tota totius. Quod oportebat demonstrare.

PROP. VI. THEOR.

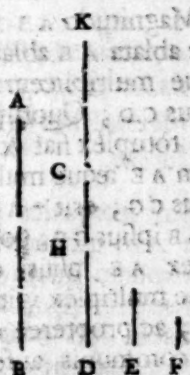
Si due magnitudines duarum magnitudinum æque multiplices sint, & ablata quodam sint earundem æque multiplices, erunt & reliqua vel eisdem æquales, vel ipsarum æque multiplices.

Due magnitudines AB CD duarum magnitudinum E F æque multiplices sint, & ablata AG CH earundem sint æque multiplices. dico & reliquas GB HD vel ipsis E F æquales esse,

esse, vel ipsarum æque multiplices. Sit enim primum CB æqualis E . dico & HD ipsi F esse æqualem. ponatur ipsi F æqualis CK . & quoniam A G æque multiplex est E , ac CH ipsius F ; estque G B quidem æqualis E ; CK vero æqualis F : erit AB æque multiplex E , ac KH ipsius F , æque autem multiplex ponitur AB ipsius E , ac CD ipsius F . ergo KH æque multiplex est F , ac CD ipsius F . quoniam igitur utraque ipsarum KH CD est æque multiplex F , erit KH æqualis CD . communis auferatur CH . ergo reliqua KC reliquæ HD est æqualis. sed KC est æqualis F . & HD igitur ipsi F est æqualis; ideoque GB ipsi E , & HD ipsi F æqualis erit. similiter demonstrabimus si GB multiplex fuerit ipsius E , & HD ipsius F æque multiplicem esse. Si igitur duæ magnitudines duarum magnitudinum æque multiplices sint, & ablatæ quædam sint earundem æque multiplices, erunt & reliquæ, vel eisdem æquales, vel ipsarum æque multiplices. Quod demonstrare oportebat.



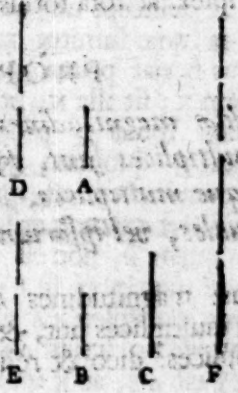
a. hujus.



PROP. VII. THEOR.

Æquales ad eandem eandem habent proportionem, & eadem ad æquales.

Sint æquales magnitudines A B , alia autem quævis magnitudo C . dico utramque ipsarum A B ad C eandem proportionem habere: & C ad utramque A B similiter eandem habere proportionem. Sumantur ipsarum A B æque multiplices D E , & ipsius C alia utcunque multiplex F . quoniam igitur æque multiplex est D ipsius A , ac E ipsius B , estque A ipsi B æqualis; erit & D æqualis E ; alia autem utcunque est F . ergo si D superat F , & E ipsam F superabit; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor. & sunt D E qui-



dem

a. 5. Diffin.

dem ipsarum $A B$ æque multiplices: F vero alia utcumque multiplex ipsius C . erit igitur F ut A ad C , ita B ad C . dico insuper C ad utramque ipsarum $A B$ eandem habere proportionem. iisdem enim constructis similiter ostendemus D ipsi E æqualem esse, si igitur F superat D , ipsam quoque E superabit; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor. atque est F quidem ipsius C multiplex; $D E$ vero alia utcumque æque multiplices ipsarum $A B$. ergo F ut C ad A , ita erit C ad B . Æquales igitur ad eandem, eandem habent proportionem, & eadem ad æquales. Quod ostendere oportebat.

PROP. VIII. THEOR.

Inæqualium magnitudinum major ad eandem maiorem habet proportionem, quam minor: & eadem ad minorem, maiorem proportionem habet, quam ad maiorem.

Sint inæquales magnitudines $A B C$, & sit $A B$ major. sit alia vero utcumque D . dico $A B$ ad D maiorem habere proportionem quam C ad D . & D ad C maiorem habere proportionem quam ad $A B$. Quoniam $A B$ major est quam C , ponatur ipsi C æqualis $B E$, hoc est $A B$ excedat C per $A E$. itaque $A E$ aliquoties multiplicata major erit quam D . multiplicetur $A E$ quoad fiat major quam D , sitque ipsius multiplex $F G$ ipsa D major. quotuplex autem est $F G$ ipsius $A E$, totuplex fiat $G H$ ipsius $E B$, & K ipsius C . sumatur etiam ipsius D dupla quidem L , tripla P , & sic deinceps una amplius, quoad ea quæ sumitur multiplex ipsius D , fiat prima quæ sit major quam K ; sit illa N . sitque M multiplex ipsius D proxime minor quam N . quoniam itaque N prima multiplex est ipsius D quæ major est quam K ; erit M non major quam K , hoc est K non erit minor quam M . & cum æque multiplex sit $F G$ ipsius $A E$ ac $G H$ ipsius $E B$, erit $F G$ æque multiplex $A E$ ac $F H$ ipsius $A B$, æque autem multiplex est $F G$ ipsius $A E$ ac K ipsius C , ergo $F H$ æque multiplex est $A B$, ac K ipsius C ; hoc est $F H K$ ipsarum $A B$ & C sunt

a. 1. huius.

sunt æque multiplices. rursus quoniam GH æque multiplex est ipsius EB ac K ipsius C , estque EB æqualis C erit & GH ipsi K æqualis. sed K non minor est quam M non igitur GH minor erit quam M , sed est FG major quam D , ergo tota FH major erit quam M & D , sed M & D simul sunt æquales ipsi N quia M est multiplex ipsius D ipsi N proxime minor, quare FH major erit quam N , unde cum FH superat N , K vero ipsam N non superat, & sunt FH & K æque multiplices ipsarum AB & C , & est N ipsius D alia multiplex ergo AB ad D maiorem rationem habebit quam C ad D . Dico præterea & D ad C maiorem habere proportionem, quam D ad AB . iisdem enim constructis similiter ostendemus N superare K , ipsam vero FH non superare, atque est N multiplex ipsius D , & FH K aliæ utcumque ipsarum AB C æque multiplices. ergo D ad C maiorem proportionem habet, quam D ad B . Inæqualium igitur magnitudinum major ad eandem maiorem habet proportionem, quam minor, & eadem ad minorem maiorem proportionem habet, quam ad maiorem. Quod ostendere oportebat.

6. 1. Axiom.
huius.

7. Defin.
huius.

PROP. IX. THEOR.

Quæ ad eandem, eandem proportionem habent, inter se æquales sunt; & ad quas eadem, eandem habet proportionem, ipsæ inter se sunt æquales.

Habeat enim utraque ipsarum A B ad C eandem proportionem. dico A ipsi B æqualem esse. nam si non esset æqualis, non haberet A utraque ipsarum A B ad eandem eandem proportionem. habet autem æqualis igitur est A ipsi B . Habeat rursus C ad utramque ipsarum A B eandem proportionem. dico A æqualem esse ipsi B . nisi enim ita sit, non A habebit C ad utramque A B eandem proportionem. habet autem ergo A ipsi B necessario est æqualis. quæ igitur ad eandem, eandem proportionem habent, æquales inter se sunt: & ad quas eadem, eandem habet proportionem, ipsæ inter se sunt æquales. Quod demonstrare oportebat.

8. huius.

PROP.

PROP. X. THEOR.

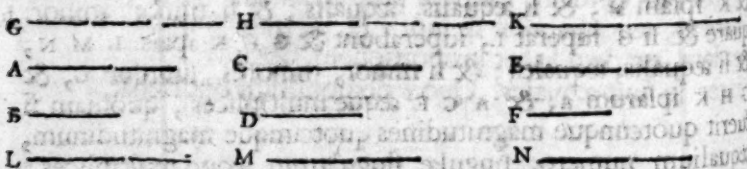
Ad eandem proportionem habentium quæ majorem proportionem habet, illa major est; ad quam vero eandem majorem habet proportionem, illa minor est.

Habeat enim A ad C majorem proportionem, quam B ad C. dico A quam B majorem esse. si enim non est major, vel æqualis est, vel minor. æqualis autem non est A ipsi B, utraque enim ipsarum A ad C eandem haberet proportionem. atqui eandem non habet. non igitur A ipsi B est æqualis. sed neque minor est A quam B; haberet enim A ad C minorem proportionem, quam B. atqui non habet minorem, non igitur A minor est, quam B. ostensum autem est neque esse æqualem. ergo A quam B major erit. habeat rursus C ad B majorem proportionem quam C ad A. dico B minorem esse quam A. si enim non est minor, vel æqualis est, vel major. æqualis utique non est B ipsi A; etenim C ad utramque ipsarum A B eandem proportionem haberet. non habet autem. ergo A ipsi B non est æqualis. sed neque major est B quam A; haberet enim C ad B minorem proportionem quam ad A. atqui non habet. non igitur B quam A est major. ostensum autem est neque æqualem esse. ergo B minor erit quam A. Ad eandem igitur proportionem habentium quæ majorem proportionem habet, illa major est; & ad quam eandem majorem habet proportionem, illa minor est. Quod oportebat demonstrare.

PROP. XI. THEOR.

Quæ eidem eadem sunt proportionēs, & inter se eadem sunt.

Sint enim ut A ad B ita C ad D: ut autem C ad D ita E ad F. dico ut A ad B, ita esse E ad F. fumantur enim ipsæ



rum quidem A C E æque multiples G H K; ipsarum vero B D F aliæ utcumque æque multiples L M N. Quoniam

tur est ut A ad B , ita C ad D , & sumptæ sunt ipsarum A C æque multiplices G H , & ipsarum B D aliæ utcumque æque multiplices L M ; si G superat L , & H ipsam M superabit; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor. rursus quoniam est ut C ad D , ita E ad F , & sumptæ sunt ipsarum C E æque multiplices H K , ipsarum vero D F aliæ utcumque æque multiplices M N ; si H superat M , & K ipsam N superabit; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor. sed si H superat M , & G superabit L ; & si æqualis, æqualis; & si minor minor; quare si G superat L , & K ipsam N superabit; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor. & sunt G K quidem ipsarum A E æque multiplices; L N vero ipsarum B F aliæ utcumque æque multiplices. ergo ut A ad B , ita erit E ad F . Quæ igitur eidem eadem sunt proportionēs, & inter se eadem sunt. Quod ostendisse oportuit.

PROP. XII. THEOR.

Si quocumque magnitudines proportionales fuerint; ut una antecedentium ad unam consequentium, ita erunt antecedentes omnes ad omnes consequentes.

Sint quocumque magnitudines proportionales A B C D E F , & ut A ad B , ita sit C ad D , & E ad F . dico ut A ad B , ita esse A C E ad B D F . sumantur enim ipsarum A C E æ-

G —————	H —————	K —————
A —————	C —————	E —————
B —————	D —————	F —————
L —————	M —————	N —————

que multiplices G H K , & ipsarum B D F aliæ utcumque æque multiplices L M N . Quoniam igitur ut A ad B , ita est C ad D , E ad F , & sumptæ sunt ipsarum quidem A C E æque multiplices G H K , ipsarum vero B D F aliæ utcumque æque multiplices L M N ; si G superat L , & H ipsam M superabit, & K ipsam N ; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor. quare & si G superat L , superabunt & G H K ipsas L M N ; & si æqualis, æquales; & si minor, minores. suntque G , & H K ipsarum A , & A C E æque multiplices, quoniam si fuerit quocumque magnitudines quocumque magnitudinum, æqualium numero, singulæ singularum æque multiplices; quodplex est una magnitudo unius, totuplex erunt & omnes omnium. eadem ratione & L & L M N ipsarum B , & B D F sunt æque multiplices. est igitur ut A ad B , ita

A C E

A C E ad B D F. Quare si quotcunque magnitudes proportionales fuerint, ut una antecedentium ad unam consequentium, ita erunt antecedentes omnes ad omnes consequentes. Quod demonstrare oportebat.

PROP. XIII. THEOR.

Si prima ad secundam eandem habeat proportionem quam tertia ad quartam, tertia autem ad quartam maiorem proportionem habeat quam quinta ad sextam: & prima ad secundam maiorem habebit proportionem quam quinta ad sextam.

Prima enim A ad secundam B eandem proportionem habeat quam tertia C ad quartam D, tertia autem C ad quartam D maiorem habeat proportionem quam quinta E ad sextam F. dico & primam A ad secundam B maiorem proportionem

M —————	G —————	H —————
A —————	C —————	E —————
B —————	D —————	F —————
N —————	K —————	L —————

habere, quam quintam E ad sextam F. Quoniam enim C ad D maiorem proportionem habet quam E ad F, sunt quaedam ipsarum C E æque multiplices, & ipsarum D F aliae utcunque æque multiplices: & multiplex quidem C superat multiplicem D; multiplex vero E non superat multiplicem F. sumantur, & sint ipsarum C E æque multiplices G H, & ipsarum D F aliae utcunque æque multiplices K L, ita ut G quidem superet K: H vero ipsam L non superet: & quotuplex est G ipsius C, totuplex sit & M ipsius A; quotuplex autem K ipsius D, totuplex sit & N ipsius B. & quoniam est ut A ad B ita C ad D, & sumptæ sunt ipsarum A C æque multiplices M G, & ipsarum B D aliae utcunque æque multiplices N K: si ⁶ M superat N, & G ipsam K superabit; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor. sed G superat K. ergo & M ipsam N superabit. H vero non superat L. suntque M H ipsarum A F æque multiplices, & N L ipsarum B F aliae utcunque æque multiplices. ergo A ad B maiorem proportionem habebit quam E ad F. Si igitur prima ad secundam eandem habeat proportionem quam tertia ad quartam; tertia vero ad quartam maiorem proportionem habeat quam quinta ad sextam: & prima ad secundam maiorem habebit proportionem quam quinta ad sextam. Quod ostendere oportebat.

PROP.

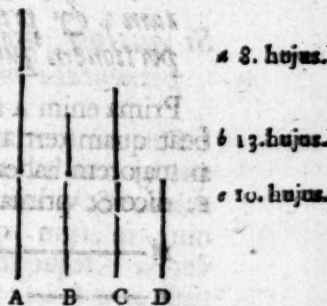
a 7. Diffin. huius.

b 5. Diffin. huius.

PROP. XIV. THEOR.

Si prima ad secundam eandem habeat proportionem quam tertia ad quartam; prima autem major sit quam tertia, & secunda quam quarta major erit; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor.

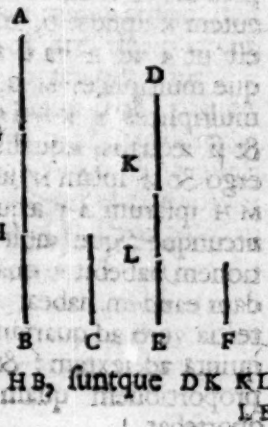
Prima enim A ad secundam B eandem proportionem habeat quam tertia C ad quartam D: major autem sit A quam C. dico & A quam D maiorem esse. Quoniam enim A maior est quam C, & alia est utcumque magnitudo B, habebit A ad B maiorem proportionem quam C ad B; sed ut A ad B ita C ad D. ergo & C ad D maiorem habebit proportionem quam C ad B. ad quam vero eandem maiorem proportionem habet, illa minor est. quare D est minor quam B, ac propterea B quam D maior erit. similiter demonstrabimus & si A æqualis sit ipsi C, & B ipsi D esse æqualem; & si A sit minor quam C, & B quam D minorem esse. Si igitur prima ad secundam eandem habeat proportionem quam tertia ad quartam; prima autem major sit quam tertia, & secunda quam quarta major erit; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor. Quod demonstrare oportebat.



PROP. XV. PROBL.

Partes inter se comparata eandem habent proportionem quam habent earum æque multiplices.

Sit enim AB æque multiplex C, ac DE ipsius F. dico ut C ad F, ita esse AB ad DE. Quoniam enim æque multiplex est AB ipsius C, ac DE ipsius F; quot magnitudines sunt in AB æquales ipsi C, totidem erunt & in DE æquales F. dividatur AB in magnitudines ipsi C æquales, quæ sunt AG GH HB; & DE dividatur in magnitudines æquales F, videlicet in DK KL LE; erit igitur ipsarum AG GH HB multitudo æqualis multitudini DK KL LE. & quoniam æquales sunt AG GH HB, suntque DK KL LE



- a* 7. hujus. LE inter se æquales; ut AG ad DK, ita erit GH ad KL, &
b 12. hujus. HB ad LE. atque erit *b* ut una antecedentium ad unam
 consequentium, ita omnes antecedentes ad omnes conse-
 quentes: est igitur ut AG ad DK, ita AB ad DE. sed AO
 ipsi C est æqualis, & DK ipsi F. ergo ut C ad F, ita erit AB
 ad DE. Partes igitur inter se comparatæ eandem habent
 proportionem quam habent earum æque multiplices. Quod
 ostendendum fuit.

PROP. XVI. THEOR.

Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, & permutatæ proportionales erunt.

- Sint quatuor magnitudines proportionales A B C D, sit-
 que ut A ad B, ita C ad D. dico & permutatas proportio-
 nales esse, videlicet ut A ad C, ita esse B ad D. Sumantur e-
 nim ipsarum qui-
 dem A B æque mul-
 tiplices E F, ipsarum
 vero C D alia utcun-
 que æque multipli-
 ces G H. & quoniam
 æque multiplex est E ipseus A, ac F ipseus B: partes autem
 inter se comparatæ eandem habent *a* proportionem quam
 habent earum æque multiplices; erit ut A ad B ita E ad F, ut
 autem A ad B ita C ad D. ergo & ut C ad D ita E ad F.
 rursus quoniam G H sunt ipsarum C D æque multiplices,
 partes autem eandem proportionem habent, inter se compa-
 ratæ, quam habent earum æque multiplices; erit *a* ut C ad
 D ita G ad H. sed ut C ad D ita E ad F. ergo & ut E ad F
 ita G ad H. quod si quatuor magnitudines proportionales
 sint, prima autem major *c* sit quam tertia, & secunda quam
 quarta major erit; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor.
 si igitur E superat G, & F ipsam H superabit; & si æqualis,
 æqualis; & si minor, minor; suntque E F ipsarum A B æque
 multiplices, & C H ipsarum C D alia utcunque æque mul-
 tiplices, ergo *a* ut A ad C ita erit B ad D. Si igitur quatuor
 magnitudines proportionales fuerint, & permutatæ propo-
 tionales erunt. Quod ostendere oportebat.

PROP

PROP. XVII. THEOR.

*Si compositæ magnitudines sint proportionales, & di-
visæ proportionales erunt.*

Sint compositæ magnitudines proportionales $AB BE CD$
 DF . hoc est ut AB ad BE , ita sit CD ad DF . dico etiam di-
visas proportionales esse, videlicet ut AE ad EB ita erit
 CF ad FD . sumantur enim ipsarum quidem $AE EB CF FD$
æque multiplices $GH HK LM$
 MN , ipsarum vero $EB FD$ alia
utrunque æque multiplices KX
 NP . Quoniam æque multiplex est
 GH ipsius AE , CHK ipsius EB ,
erit GH ipsius AE æque multi-
plex, ac GK ipsius AB . æque au-
tem multiplex est GH ipsius AE ,
ac LM ipsius CF . ergo GK æque
multiplex est AB , ac LM ipsius
 CF . rursus quoniam æque multi-
plex est LM ipsius CF , ac MN
ipsius FD , erit LM æque mul-
tiplex CF , ac LN ipsius ED . sed æque multiplex erat LM
ipsius CF , ac GK ipsius AB . æque igitur multiplex est GK
ipsius AB , ac LN ipsius CD . quare $GK LN$ ipsarum $AB CD$
æque multiples erunt. rursus quoniam æque multiplex est
 HK ipsius EB , ac MN ipsius FD : est autem & KX ipsius EB
æque multiplex, ac NP ipsius FD . & composita HX ipsius
 EB æque multiplex est, ac MP ipsius FD . quare cum sit
ut AB ad BE , ita CD ad DF & sumptæ sint ipsarum qui-
dem $AB CD$ æque multiplices $GK LN$, ipsarum vero EB
 FD alia utrunque æque multiplices $HX MP$: si GK su-
perat HX , & LN superabit MP ; & si æqualis, æqualis; & si
minor, minor. superet igitur GK ipsam HX , communique
ablata HK , & GH ipsam KX superabit. sed si GK superat HX ,
& LN superat MP , itaque superat LN ipsam MP : commu-
nique MN ablata, & LM superabit NP . quare si GH superat
 KX , & LM ipsam NP superabit. similiter demonstrabimus
& si GH sit æqualis KX , & LM ipsi NP esse æqualem; & si
minor, minorem. sunt autem $GH LM$ ipsarum $AE CF$ æque
multiplices, & ipsarum $EB FD$ alia utrunque æque mul-
tiplices $KX NP$. ergo ut AE ad EB ita erit CF ad FD . Si
igitur compositæ magnitudines sint proportionales, & di-
visæ proportionales erunt. Quod demonstrare oportebat.

PROP. XVII. THEOR.

Si diuise magnitudines sint proportionales, & compositae proportionales erunt.

Sint diuise magnitudines proportionales AE EB CF FD : hoc est ut AE ad EB , ita CF ad FD . dico etiam compositas proportionales esse, videlicet ut AB ad BE , ita esse CD ad DF . Si enim non est ut AB ad BE , ita CD ad DF ; erit ut AB ad BE , ita CD vel ad minorem quam FD , vel ad maiorem. sit primo ad minorem, nempe ad DG . & quoniam est ut AB ad BE , ita CD ad DG , compositae magnitudines sunt proportionales; ergo & diuise proportionales erunt. est igitur ut AE ad EB , ita CG ad GD . ponitur autem ut AE ad EB , ita CF ad FD . quare & ut CG ad GD , ita CF ad FD . at CG prima maior est quam tertia CF . ergo & secunda DG quam quarta DF maior erit. sed & minor, quod fieri non potest. non igitur est ut AB ad BE , ita CD ad DG . similiter ostendemus neque esse ad maiorem quam DF . ad ipsam igitur DF sit necesse est. Quare si diuise magnitudines sint proportionales, & compositae proportionales erunt. Quod oportebat demonstrare.

PROP. XIX. THEOR.

Si fuerit ut tota ad totam, ita ablata ad ablatam: & reliqua ad reliquam erit ut tota ad totam.

Sit enim ut tota AB ad totam CD , ita ablata AE ad ablatam CF . dico & reliquam EB ad reliquam FD ita esse ut tota AB ad totam CD . Quoniam enim est ut tota AB ad totam CD , ita AE ad CF . & permutando erit ut AB ad AE , ita CD ad CF . quoniam compositae magnitudines sunt proportionales, & diuise proportionales erunt, ut igitur EB ad EA , ita DF ad FC : rursusque permutando ut BE ad DF , ita EA ad FC . sed ut EA ad CF , ita posita est AB ad CD . & reliqua igitur EB erit ad reliquam FD , ut tota AB ad totam CD . Quare si fuerit ut tota ad totam, ita ablata ad ablatam; & reliqua ad reliquam erit ut tota ad totam. Quod demonstrare oportebat.

Cor. Si quatuor magnitudines proportionales sint, per conversionem rationis proportionales erunt. Sit enim ut AB ad AE , ita CD ad DF , erit permutando AB ad CD , ita BE ad DF . quare cum est tota AB ad totam CD , ut ablata BE ad ablatam DF , erit & reliqua AE ad reliquam CF , ut tota AB ad totam CD . quare rursus permutando & invertendo erit ut AB ad AE , ita CD ad CF . quod est per conversionem rationis.

PROP. XX. THEOR.

Si sint tres magnitudines, & aliae ipsis numero aequales, quae binae sumantur, in eadem proportionem: ex aequali autem prima major sit, quam tertia, & quarta quam sexta major erit; & si aequalis, aequalis; & si minor, minor.

Sint tres magnitudines A B C , & aliae ipsis numero aequales D E F ; binae sumptae, & in eadem proportionem: sitque ut A ad B , ita D ad E , & ut B ad C , ita E ad F : ex aequali autem prima major sit A quam C dico & B quam F maiorem esse; & si aequalis, aequalis; & si minor, minorem.

Quoniam enim A maior est quam C , alia vero est utcumque B , & maior ad eandem maiorem habet A proportionem quam minor; habebit A ad B maiorem proportionem quam C ad B . sed ut A ad B , ita D ad E ; & invertendo ut C ad B , ita F ad E . ergo & D ad E maiorem habet proportionem quam F ad E . ad eandem vero proportionem habentium quae maiorem habet proportionem, illa maior est. maior igitur est D quam F . similiter ostendemus & si A sit aequalis C , & D ipsi F aequalem esse; & si minor, minorem.

Si igitur tres magnitudines fuerint, & aliae ipsis numero aequales, quae binae sumantur, & in eadem proportionem: ex aequali autem prima major sit quam tertia; & quarta quam sexta major erit; & si aequalis, aequalis; & si minor, minor. Quod ostendere oportebat.

H.

PROP.

PROP. XXI. THEOR.

Si sint tres magnitudines, & alie ipsis numero æquales, quæ binæ sumantur & in eadem proportionē; sit autem perturbata earum analogia, & ex æquali prima maior sit quam tertia; & quarta quam sexta maior erit; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor.

Sint tres magnitudines proportionales $A B C$, & alie ipsis numero æquales $D E F$, binæ sumptæ & in eadem proportionē. sit autem perturbata earum analogia, videlicet ut A quidem ad B , ita E ad F ; ut vero B ad C , ita D ad E ; & ex æquali A maior sit quam C . dico & D quam F maiorem esse; & si æqualis, æqualem; & si minor, minorem. Quoniam enim maior est A quam C , alia vero est B ; habebit A ad B maiorem proportionem quam C ad B . sed ut A ad B , ita E ad F : & invertendo ut C ad B , ita E ad D . quare & E ad F maiorem habebit proportionem quam E ad D . ad quam vero eadem maiorem proportionem habet illa minor est F . minor igitur est F quam D ; ac propterea D quam F maior erit. similiter ostendemus & si A sit æqualis C , & D ipsi F esse æqualem; & si minor, minorem. Si igitur sint tres magnitudines, & alie ipsis æquales numero, quæ binæ sumantur & in eadem proportionē; sit autem perturbata earum analogia, & ex æquali autem prima maior sit quam tertia; & quarta quam sexta maior erit; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor. Quod demonstrare oportebat.

PROP. XXII. THEOR.

Si sint quotcunque magnitudines, & alie ipsis numero æquales, quæ binæ sumantur in eadem proportionē; & ex æquali in eadem proportionē erunt.

Sint quotcunque magnitudines $A B C$, & alie ipsis numero æquales $D E F$, binæ sumptæ in eadem proportionē, hoc est ut A quidem ad B , ita D ad E , ut autem B ad C , ita E ad F . dico & ex æquali in eadem proportionē esse, ut A ad C , ita D ad F . sumantur enim ipsarum quidem $A D$ æque multiples $G H$; ipsarum vero $B E$ alie utcunque æque multiples

plures $K L$, & ipsarum $C F$ alie utcumque æque multiples
 $M N$. Quoniam igitur est ut A ad
 B , ita D ad E , & sumptæ sunt
 ipsarum $A D$ æque multiples
 $G H$, & ipsarum $B E$ alie utcum-
 que æque multiples $K L$; erit
 ut $A G$ ad K , ita H ad L . eadem
 quoque ratione erit ut K ad M ,
 ita L ad N . & cum sint tres ma-
 gnitudines $G K M$, & alie ipsis
 numero æquales $H L N$, binæ
 sumptæ & in eadem proportionē;
 ex æquali si G superat M , & H
 ipsam N superabit; & si æqualis,
 æqualis; & si minor, minor.
 suntque $G H$ ipsarum $A D$ æque
 multiples, & $M N$ ipsarum $C F$
 alie utcumque æque multiples.
 ut igitur A ad C , ita erit D ad
 F . Quare si sint quotcumque magnitudines, & alie ipsis nu-
 mero æquales, quæ binæ sumantur in eadem proportionē,
 & ex æquali in eadem proportionē erunt. Quod demon-
 strare oportebat.

4. hujus.

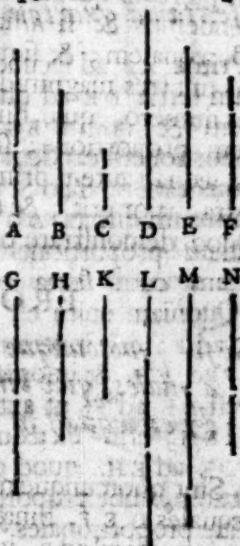
20. hujus.

Diffin. 5.
hujus.

PROP. XXIII. THEOR.

Si sint tres magnitudines, & alie ipsis numero æqua-
 les, quæ binæ sumantur in
 eadem proportionē; sit autem
 perturbata earum analogia: &
 ex æquali in eadem proporti-
 one erunt.

Sint tres magnitudines $A B C$, &
 alie ipsis numero æquales, binæ
 sumptæ in eadem proportionē, $D E$
 F ; sit autem perturbata earum a-
 nalogia, hoc est sit ut A ad B , ita E
 ad F , & ut B ad C , ita D ad E . dico
 ut A ad C , ita esse D ad F . Sumantur
 ipsarum quidem $A B D$ æque mul-
 tiplices $G H L$: ipsarum vero $C E F$
 alie utcumque æque multiples K
 $M N$. & quoniam $G H$ æque mul-
 tiplices sunt ipsarum $A B$, partes
 autem eandem habent proportionem quam habent æque
 multiples $H L$ ipsarum $B D$.



15. hujus. ipsarum multiplices erit: ut A ad B , ita G ad H . & simili ratione ut E ad F , ita M ad N . atque est ut A ad B , ita E ad F . ut igitur G ad H , ita M ad N . rursus quoniam est ut B ad C , ita D ad E , & sumptæ sunt ipsarum B & D æque multiplices H & L , ipsarum vero C & E aliæ utcumque æque multiplices K & M : erit ut H ad K , ita L ad M . ostensum autem est & ut G ad H , ita esse M ad N . quoniam igitur tres magnitudines proportionales sunt G H K , & aliæ ipsis numero æquales L M N , binæ sumptæ in eadem proportionem, estque ipsarum perturbata analogia; ex æquali, si G superat K , & L ipsam N superabit; & si æqualis, æqualis; & si minor, minor. sunt autem G K ipsarum A C æque multiplices: & L N æque multiplices ipsarum D F . ut igitur A ad C , ita erit D ad F . Quare si fuerint tres magnitudines, & aliæ ipsis numero æquales, quæ binæ sumantur in eadem proportionem, sit autem perturbata earum analogia; & ex æquali in eadem proportionem erunt. Quod demonstrare oportebat.

PROP. XXIV. THEOR.

Si prima ad secundam eandem habeat proportionem, quam tertia ad quartam; habeat autem & quinta ad secundam proportionem eandem, quam sexta ad quartam: & composita prima cum quinta ad secundam eandem proportionem habebit, quam tertia cum sexta ad quartam.

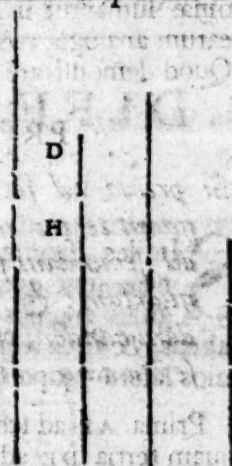
- Prima AB ad secundam C eandem habeat proportionem, quam tertia DE ad quartam F . habeat autem & quinta BE ad secundam C proportionem eandem quam sexta EH ad quartam F . dico & compositam primam cum quinta AC ad secundam C eandem proportionem habere, quam tertiam cum sexta DH ad quartam F . Quoniam enim est ut BE ad C , ita EH ad F ; erit invertendo ut C ad BE , ita F ad EH . & quoniam ut AB ad C , ita est DE ad F : ut autem C ad BE , ita F ad EH ; erit ex æquali ut AB ad BE , ita DE ad EH . quod cum divisæ magnitudines sint proportionales, & compositæ proportionales erunt: ut igitur AG ad GB , ita est DH ad HE . sed & ut GB ad C , ita HE ad F . ergo, ex æquali, ut AG ad C , ita erit

erit DH ad F . Si igitur prima ad secundam eandem habeat proportionem quam tertia ad quartam: habeat autem & quinta ad secundam proportionem eandem quam sexta ad quartam: & composita prima cum quinta ad secundam eandem proportionem habebit quam tertia cum sexta ad quartam. Quod ostendere oportebat.

PROP. XXV. THEOR.

Si quatuor magnitudines fuerint proportionales, maxima ipsarum & minima, duabus reliquis majores erunt.

Sint quatuor magnitudines proportionales $ABCD$ E F ; & sit ut AB ad CD , ita E ad F . sit autem maxima ipsarum AB & F minima. dico AB & F ipsis CD & E majores esse. ponatur enim ipsi quidem E æqualis AG , ipsi vero F æqualis CH . Quoniam igitur est ut AB ad CD , ita E ad F : estque AG æqualis E , & CH æqualis F ; erit ut AB ad DC , ita AG ad CH . & quoniam ut tota AB ad totam CD , ita ablata AG ad ablatam CH ; & reliqua GB ad reliquam HD erit: ut tota AB ad CD totam. major autem est AB quam CD . ergo & GB quam HD major erit. quod cum AG sit æqualis ipsi E , & CH ipsi F ; erunt AG & F ipsis CH & E æquales. si autem inæqualibus æqualia addantur, tota inæqualia erunt. ergo AB & F ipsis CD & E necessario majores. Si igitur quatuor magnitudines fuerint proportionales, maxima ipsarum & minima, duabus reliquis majores erunt. Quod demonstrare oportebat.



19. hujus

EUCLIDIS

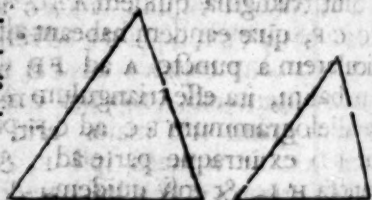
ELEMENTORUM.

LIBER SEXTUS.

DIFFINITIONES.

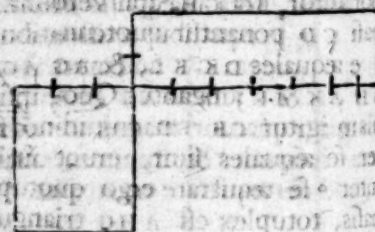
I

Similes figuræ rectilinéæ sunt quæ & singulos angulos æquales habent, & circa æquales angulos latera proportionalia.



II.

Reciproce figuræ sunt quando in utraque figura antecedentes, & consequentes rationum fuerint termini.



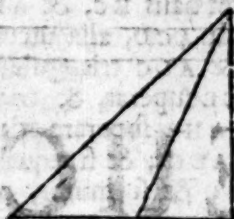
III.

Extrema ac media ratione secari recta linea dicitur, quando fit, ut tota ad majus segmentum, ita majus segmentum ad minus.

IV.

IV.

Altitudo cuiusque figuræ est, linea perpendicularis quæ à vertice ad basim ducitur.



V.

Ratio ex rationibus componi dicitur, quando rationum quantitates inter se multiplicatæ, aliquam efficiunt rationem.

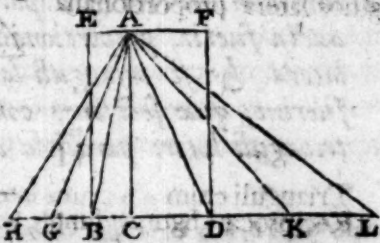
PROPOSITIO I.

THEOREMA.

Triangula, & parallelogramma quæ eandem habent altitudinem, inter se sunt ut bases.

Sint triangula quidem ABC ACD , parallelogramma vero EC CF , quæ eandem habeant altitudinem, videlicet perpendicularem à puncto A ad BD ductam. dico ut basis BC ad CD basim, ita esse triangulum ABC ad triangulum ACD , & parallelogrammum EC ad CF parallelogrammum. produca-

tur BD ex utraque parte ad puncta H L , & ipsi quidem BC basi æquales quotcumque ponantur BG GH , ipsi vero basi CD ponantur quotcumque æquales DK KL , & AG AH AK AL jungantur. Quoniam igitur CB BG GH inter se æquales sunt, erunt & triangula AHG AGB ABC inter se æqualia. ergo quotuplex est basis HC ipsius BC 38. primi. basis, totuplex est AHC triangulum trianguli ABC . eadem ratione quotuplex est LC basis ipsius basis CD , totuplex est & triangulum ALC ipsius ACD trianguli: & si æqualis est HC basis basi CL , & triangulum AHC triangulo ALC est æquale: & si basis HC basim CL superat, & triangulum AHC superabit triangulum ALC : & si minor, minus. quatuor igitur magnitudinibus existentibus, videlicet duabus basibus BC CD , & duobus triangulis ABC ACD , sumpta sunt æque multiplicia basis quidem BC , & ABC trianguli, videlicet

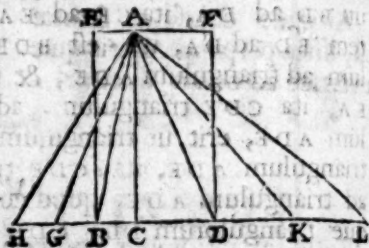


videlicet basis HC , & AHC triangulum : basis vero CD , & trianguli ACD , alia utcumque æque multiplicia, nempe CL basis, & ALC triangulum ; atque ostensum est si HC basis basim CL superat, & triangulum AHC superare triangulum ALC ; & si æqualis, æquale ; & si minor, minus.

Diffin. 7.
quinti.

41. primi.

11. quinti



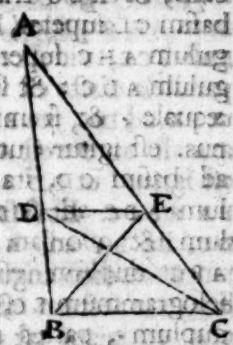
est igitur ut BC basis ad basim CD , ita triangulum ABC ad ACD triangulum. & quoniam trianguli ABC duplum est parallelogrammum EC , & trianguli ACD parallelogrammum FC duplum, partes autem cum pariter multiplicibus eandem inter se proportionem habent : igitur ut ABC triangulum ad triangulum ACD , ita parallelogrammum EC ad CF parallelogrammum. quoniam igitur ostensum est ut basis BC ad CD basim, ita esse ABC triangulum ad triangulum ACD ; ut autem ABC triangulum ad triangulum ACD , ita parallelogrammum EC ad CF parallelogrammum ; erit 4 ut BC basis ad basim CD , ita parallelogrammum EC ad FC parallelogrammum. Quare triangula & parallelogramma quæ eandem habent altitudinem, inter se sunt ut bases. Quod demonstrare oportebat.

PROP. II. THEOR.

Si uni laterum trianguli parallela quædam recta linea ducta fuerit, proportionaliter secabit ipsius trianguli latera. & si trianguli latera proportionaliter secta fuerint, quæ sectiones conjungit recta linea, reliquo trianguli lateri parallela erit.

Trianguli enim ABC uni laterum BC , parallela ducatur DE . dico ut DB ad DA , ita esse CE ad EA . jungantur BE & CD .
37. primi. triangulum igitur BDE triangulo CDE est æquale, in eadem enim sunt basi DE , & in eisdem DF & BC parallelis ; aliud autem triangulum est ADE : sed æqualia ad idem eandem habent proportionem ; ergo ut triangulum BDE ad triangulum ADE , ita est CDE triangulum ad triangulum ADE .
7. quinti. ut autem triangulum BDE ad triangulum ADE , ita est BD ad DA ; nam cum eandem altitudinem habeant, videlicet perpendicularem à puncto E ad AB ductam, inter se sunt ut bases. & ob eandem causam ut CDE triangulum ad triangulum ADE , ita CE ad EA . & ut igitur BD ad DA , ita est CE ad EA .
11. quinti. Et si trianguli ABC latera AB & AC pro-

proportionaliter secta sunt; ut BD ad DA, ita sit CE ad EA; & jungatur DE, dico DE ipsi BC parallelam esse. iisdem constructis; quoniam est ut BD ad DA, ita CE ad EA; ut autem BDE triangulum ad triangulum ADE; & ut CE ad EA, ita CDE triangulum ad triangulum ADE, erit ut triangulum BDE ad triangulum ADE, ita CDE triangulum ad triangulum ADE. quod cum utrumque triangulorum BDE CDE ad triangulum ADE eandem habeat proportionem; erit BDE triangulum triangulo CDE æquale; & sunt in eadem basi DE æqualia autem triangu- la, & in eadem basi constituta, etiam in eisdem sunt parallelis; ergo DE ipsi BC parallela est. Si igitur uni laterum trianguli parallela quædam recta linea ducta fuerit, proportionaliter secabit ipsius trianguli latera. & si trianguli latera proportionaliter secta fuerint, quæ sectiones conjungit recta linea reliquo trianguli lateri parallela erit. Quod oportebat demonstrare.

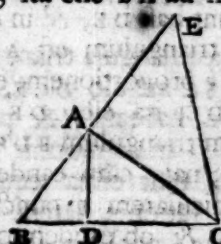


11. quinti.
f. 9. quinti.

PROP. III. THEOR.

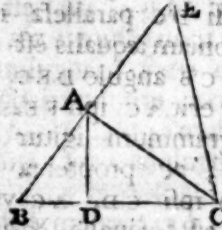
Si trianguli angulus bifariam secetur, secans autem angulum recta linea secet etiam basim; basis partes eandem proportionem habebunt, quam reliqua trianguli latera. Et si basis partes eandem proportionem habeant, quam reliqua trianguli latera; quæ à vertice ad sectionem ducitur recta linea, trianguli angulum bifariam secabit.

Sit triangulum ABC, & secetur angulus BAC bifariam a recta linea AD, dico ut BD ad DC, ita esse BA ad AC. ducatur per C ipsi DA parallela CE, & producta BA conveniat cum ipsa in E puncto. Quoniam igitur in parallelas AD EC incidit recta linea quædam AC, erit ACE angulus angulo CAD æqualis. sed CAD angulus ponitur æqualis angulo BAD. ergo & BAD ipsi ACE angulo æqualis erit. rursus quoniam in parallelas AD EC recta linea



9. primi.
31. prima.
29. primi.

linea BAE incidit, exterior angulus BAD æqualis est interiori AEC . ostensus autem est & angulus ACE angulo BAD æqualis. ergo & ACE ipsi ABC æqualis erit: ac propterea
 6 primi. latus AE æquale lateri AC . & quoniam uni laterum trianguli BCE , videlicet ipsi EC
 2. hujus. parallela ducta est AD ; erit ut BD ad DC , ita BA ad AE ; æqualis autem est AE ipsi AC .
 7. quinti. est igitur sicut BD ad DC , ita BA ad AC . Et si sit ut BD ad DC , ita BA ad AC , & AD jungatur. dico angulum BAC bifariam sectum esse recta linea AD . iisdem enim constructis, quoniam est ut BD ad DC , ita BA ad AC ; sed & ut BD ad DC , ita BA ad AE , etenim uni laterum trianguli BCE , videlicet ipsi EC parallela ducta est AD , erit & ut BA ad AC , ita BA ad AE . ergo AC est æqualis AE , ac propterea & angulus AEC angulo EAC æqualis. sed angulus quidem AEC est æqualis angulo exteriori BAD ; angulus vero ACE æqualis alterno CAD . quare & BAD angulus ipsi CAD æqualis erit. angulus igitur BAC bifariam sectus est recta linea AD . Ergo si trianguli angulus bifariam secetur, secans autem angulum recta linea etiam basin secet; basis partes eandem proportionem habebunt, quam reliqua trianguli latera. & si basis partes eandem proportionem habeant, quam reliqua trianguli latera; quæ a vertice ad sectionem ducitur recta linea, trianguli angulum bifariam secabit. Quod oportebat demonstrare.

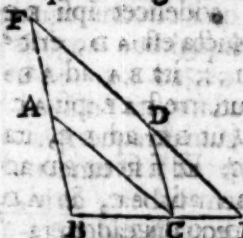


PROP. IV. THEOR.

Æquiangulorum triangulorum latera quæ circum æquales angulos proportionalia sunt; & homologa, sive ejusdem rationis, sunt latera quæ æqualibus angulis subtenduntur.

Sint æquiangula triangula ABC DCE , quæ angulum quidem ABC angulo DCE , angulum vero ACB angulo DEC æqualem habeant, & præterea angulum BAC angulo CDE . dico triangulorum ABC DCE proportionalia esse latera quæ sunt circa æquales angulos; & homologa, sive ejusdem rationis, latera esse quæ æqualibus angulis subtenduntur. ponatur BC in directum ipsi CE . Et quoniam
 17. primi. anguli ABC ACB duobus rectis minores sunt, æqualis autem est angulus ACB angulo DEC ; erunt ABC DEC anguli

guli duobus rectis minores. quare BA ED productæ inter
se convenient⁶; producantur, & convenient in puncto F .
& quoniam angulus DCE est æqualis angulo ABC ; erit
 BF ipsi DC parallela. rur-
sus quoniam æqualis est an-
gulus ACB angulo DEC , pa-
rallela erit AC ipsi FE . pa-
rallelogrammum igitur est
 $FACD$; ac propterea FA
quidem ipsi CD , AC vero
ipsi FD est æqualis. & quo-
niam uni laterum trianguli FBE , videlicet ipsi FE , parallela
ducta est AC ; erit ut BA ad AF , ita BC ad CE . æqualis
autem est AF ipsi CD . ut igitur BA ad CD . ita BC ad CE ,
& permutando ut BA ad BC ita CD ad CE . rursus quoniam
 CD parallela est BF , erit ut BC ad CE , ita FD ad DE . sed
 FD est æqualis AC . ergo ut BC ad CE , ita AC ad DE . per-
mutando igitur, ut BC ad CA ita CE ad ED . itaque quoniam
ostensum est, ut AB ad BC ita DC ad CE , ut autem BC ad
 CA ita CE ad ED : erit ex æquali, ut BA ad AC ita CD ad
 DE . *Æquiangulorum igitur triangulorum proportionalia
sunt latera quæ circum æquales angulos. & homologa,
sive ejusdem rationis, latera sunt quæ æqualibus angulis sub-
tenduntur. Quod demonstrare oportebat.*



12. axio.

primi.

28. primi.

34. primi.

2. hujus.

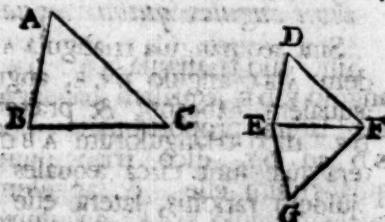
7. quinti.

21. quinti.

PROP. V. THEOR.

*Si duo triangula latera proportionalia habeant, æquian-
gula erunt triangula, & æquales habebunt angulos
quibus homologa latera subtenduntur.*

Sint duo triangula ABC DEF , quæ latera proportionalia
habeant, hoc est, sit ut AB quidem ad BC , ita DE ad EF : ut
autem BC ad CA , ita EF ad FD : & adhuc ut BA ad AC ,
ita ED ad DF . dico trian-
gulum ABC triangulo DEF
æquiangulum esse, & æqua-
les habere angulos quibus
homologa latera subtendun-
tur, angulum quidem ABC
angulo DEF , angulum ve-
ro BCA angulo EFD , &
præterea angulum BAC angulo EDF . Constituatur enim
ad rectam lineam EF , & ad puncta in ipsa E F , angulo qui-
dem ABC æqualis angulus FEG ; angulo autem BCA an-
gulus

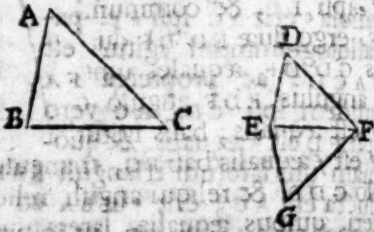


23. primi.

angulus

6 Cor. 32.
primi.

gulus EFG . quare reliquus BAC angulus $\hat{=}$ reliquo EGF est
 equalis, ideoque æquiangulum est triangulum ABC trian-
 gulo EGF . triangulorum igitur ABC EGF proportionalia
 sunt latera quæ circum æquales angulos, & homologa latera
 sunt quæ æqualibus angulis subtenduntur. ergo ut AB ad
 BC , ita GE ad EF . sed ut AB ad BC , ita DE ad EF . ut
 4. hujus. igitur DE ad EF , ita GE ad EF . ut
 4. quinti. EF . quod cum utraque ipsa-
 rum DE EG ad EF eandem
 9. quinti. proportionem habeat, erit
 DE ipsi EG æqualis. eadem ra-
 tione & DF æqualis FG . ita-
 que quoniam DE est æqualis
 EG , communis autem EF ;



f 8. primi.

duæ DE EF duabus GE EF æquales sunt, & basis DF basi FC
 æqualis. angulus igitur DEF est æqualis angulo GEF , &
 DEF triangulum æquale triangulo GEF , & reliqui anguli
 reliquis angulis æquales, quibus æqualia latera subtenduntur.
 ergo angulus quidem DEF est æqualis angulo GEF , angu-
 lus vero EDF æqualis angulo EGF ; & quoniam angulus F
 ED est æqualis angulo GEF , & angulus GEF angulo ABC ,
 erit & angulus ABC angulo FED æqualis. eadem ratione
 & angulus ACB æqualis est angulo DFE , & adhuc angulus
 ad A angulo ad D . ergo ABC triangulum triangulo DEF
 æquiangulum erit. Si igitur duo triangu-
 la latera proportio-
 nalia habeant, æquiangula erunt triangu-
 la, & æquales ha-
 bebunt angulos quibus homologa latera subtenduntur.
 Quod oportebat demonstrare.

PROP. VI. THEOR.

*Si duo triangu-
 la unum angulum uni angulo æqualem ha-
 beant, circa æquales autem angulos latera proportio-
 nalia, æquiangula erunt triangu-
 la, & æquales ha-
 bebunt angulos quibus æqualia latera subtenduntur.*

Sint duo triangu-
 la ABC DEF , unum angulum BAC uni
 angulo EDF æqualem habentia, circa æquales autem angu-
 los latera proportionalia, hoc est, sit ut BA ad AC , ita
 ED ad DF . dico triangulum ABC triangulo DEF æ-
 quiangulum esse, & angulum quidem ABC habere æ-
 qualem angulo DEF ; angulum vero ACB angulo DFE .
 13. primi. Constituitur enim ad rectam lineam DF , & ad pun-
 ctum in ipsa DE , alterutri angulorum BAC EDF æqualis
 angulus FDE , angulo autem ACB æqualis DFG . reliquus
 igitur

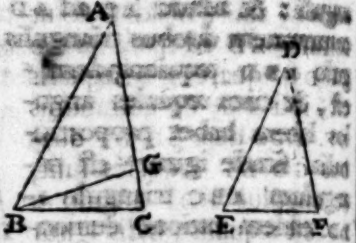
igitur ad B reliquo ad C est ^b æqualis. ergo triangu- ⁶ Cor. 32. 33
lum ABC triangulo DGF, æquiangulum est; ac propterea ^{primi. imiq}
ut BA ad AC ita est ED ad DF: ponitur autem & ut BA ^{4. hujus.}
ad AC, ita ED ad DF: ut ^{di quinq.}
igitur ED ad DF, ita ED ^{9. quinq.}
ad DF. quare ED æqualis
est ipsi DG, & communis
DF. ergo duæ ED DF dua-
bus GD DF æquales sunt,
& angulus EDF angulo G
DF est æqualis; basis igitur B
IF est æqualis basi FG, triangulumque DEF æquale trian- ^{f. 4. primi.}
gulo GDF, & reliqui anguli reliquis angulis æquales, alter
alteri, quibus æqualia latera subtenduntur. ergo angulus
quidem DFG est æqualis angulo DFE; angulus vero ad G
angulo ad E. sed angulus DFG æqualis est angulo ACB; &
angulus igitur ACB angulo DFE est æqualis. ponitur autem
& BAC angulus æqualis angulo EDF. ergo & reliquus qui
ad B æqualis est reliquo ad E. æquiangulum igitur est tri-
angulum ABC triangulo DEF. Quare si duo triangula u-
num angulum uni angulo æqualem habeant, circa æquales
autem angulos latera proportionalia; æquiangula erunt tri-
angula, & æquales habebunt angulos quibus homologa la-
tera subtenduntur. Quod ostendere oportebat.

PROP. VII. THEOR.

*Si duo triangula unum angulum uni angulo æqualem
habeant, circa alios autem angulos latera proportiona-
lia, & reliquorum utrumque, simul vel minorem,
vel non minorem recto, æquiangula erunt triangula;
& æquales habebunt angulos circa quos latera sunt
proportionalia.*

Sint duo triangula ABC DEF, unum angulum uni angulo
æqualem habentia, videlicet angulum BAC angulo EDF
æqualem, circa alios autem angulos ABC DEF latera pro-
portionalia, ut sit DE ad EF, sicut AB ad BC: & reliquorum
quæ ad C F. utrumque simul minorem vel non minorem
recto. dico triangulum ABC triangulo DEF æquiangulum
esse; angulumque ABC æqualem angulo DEF, & reliquum
videlicet qui ad C reliquo qui ad F æqualem. Si inæqualis
est angulus ABC angulo DEF, unus ipsorum maior erit. sit
major ABC: & constituatur ad rectam lineam AB, & ad ^{4. primi.}
punctum in ipsa B, angulo DEF æqualis angulus ABC. &
quo-

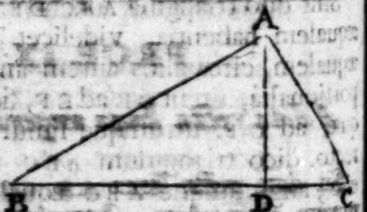
quoniam angulus quidem A est æqualis angulo D , angulus vero ABC angulo DEF : erit reliquus A & B reliquo D & E æqualis: æquiangulum igitur est ABC triangulum triangulo DEF . quare ut AB ad DE , sic BC ad EF : utque DE ad EF , sic ponitur AB ad BC . & ut igitur AB ad BC , sic AB ad BG . quod cum AB ad utramque BC & BG eandem habeat proportionem, erit BC ipsi BG æqualis: ac propterea angulus ad B est æqualis angulo BGC . quare uterque angulorum B & BGC minor est recto, igitur qui ei deinceps est AGB maior est recto, atque ostensus est angulus AGB æqualis angulo qui ad F . angulus igitur qui ad F recto maior est, atqui ponitur non maior: cum enim non est maior recto, quod est absurdum. non igitur inæqualis est angulus ABC angulo DEF . ergo ipsi est æqualis: est autem, & angulus ad A æqualis ei qui ad D . quare & reliquus qui ad C æqualis reliquo qui ad F . æquiangulum igitur est ABC triangulum triangulo DEF . Si igitur duo triacula unum angulum uni angulo æqualem habeant, circa alios autem angulos latera proportionalia, & reliquorum utrumque simul, vel minorem, vel non minorem recto: æquiangula erunt triacula, & æquales habebunt angulos circa quos proportionalia sunt latera. Quod oportebat demonstrare.



PROP. VIII. THEOR.

Si in triangulo recto angulo, ab angulo recto ad basin perpendicularis ducatur; quæ ad perpendicularem sunt triacula, & toti, & inter se similia sunt.

Sit triangulum rectangulum ABC , rectum habens angulum BAC : & à puncto A ad BC perpendicularis ducatur AD . dico triacula ABC & ADC toti triangulo ABC , & inter se similia esse. Quoniam enim angulus BAC est æqualis angulo ADB , rectus enim uterque est, & angulus ad B communis duobus triangulis ABC & ABD ; erit reliquus ACB reliquo BAD æqualis. æquiangulum igitur est triangulum ABC triangulo ABD . quare ut BC quæ subtendit angulum rectum trianguli ABC , ad BA subtenden-



tem angulum rectum trianguli ABD , sic ipsa AB subtendens angulum ad C trianguli ABC , ad DB subtendentem angulum aequalem angulo ad C , videlicet BAD ipsius ABD trianguli: & adhuc AE ad AD subtendentem angulum ad B communem duobus triangulis. ergo triangulum ABC triangulo ABD aequiangulum est; & circa aequales angulos latera habet proportionalia. simile igitur est triangulum ABC triangulo ABD . eadem ratione demonstrabimus etiam ADC triangulum triangulo ABC simile esse. quare utrumque ipsorum ABD ADC toti ABC triangulo est simile. Dico insuper triangula ABD ADC etiam inter se similia esse. Quoniam enim angulus BDA rectus est aequalis recto ADC ; sed & BAD ostensus est aequalis angulo ad C ; erit reliquus ad B reliquo DAC aequalis. aequiangulum igitur est triangulum ABD triangulo ADC . ergo BD trianguli ABD subtendens BAD angulum, ad DA trianguli ADC subtendentem angulum qui est ad C , aequalem angulo BAD , sic ipsa AD trianguli ABD subtendens angulum ad B , ad DC subtendentem angulum DAC ei qui est ad B aequalem; & adhuc BA ad AC subtendentem angulum rectum ADC . simile igitur est ABD triangulum triangulo ADC . Quare si in triangulo rectangulo ab angulo recto ab basim perpendicularis ducatur; quae ad perpendicularem sunt triangula, & toti, & inter se similia sunt. Quod oportebat demonstrare.

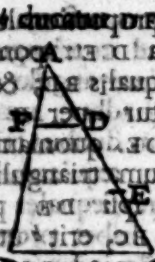
Cor. Ex hoc manifestum est, in triangulo rectangulo, ab angulo recto ad basim perpendicularem ductam, mediam proportionalem esse inter segmenta basim: & praetera inter basim & basim segmentum, latus utrumlibet segmento terminum, medium esse proportionale.

PROP. IX. PROBL.

A data recta linea imperatam partem abscindere.

Sit data recta linea AB . oportet ab ipsa AB imperatam partem abscindere. Imperetur pars tertia; & ducatur a puncto A quaedam recta linea AC , quae cum ipsa AB angulum quemlibet contineat; sumaturque in AC quodvis punctum D , & ipsi AD aequales ponantur DA & AE , deinde jungatur

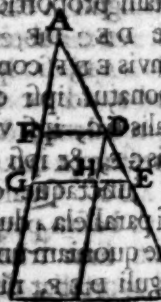
631. primi. jungatur BC; per D ipsi BC parallela ducatur DE. itaque
 quoniam uni laterum trian-
 guli ABC, videlicet ipsi BC,
 parallela ducta est ED; erit
 ut CD ad DA, ita BE ad FA;
 dupla autem est CD ipsius DA.
 ergo & BE ipsius FA dupla
 erit. tripla igitur est BA ipsius
 AF. quare a data recta linea
 AB imperata tertia pars AF abscissa est. Quod facere
 oportebat.



PROP. X. PROBL.

*Datam rectam lineam infectam, data recta linea secta
 similiter secare.*

Sit data quidem recta linea infecta AB, secta vero AC.
 oportet rectam lineam AB infectam ipsi AC sectae similiter
 secare. sit secta AC in punctis D & E, &
 ponantur ita, ut angulum quem vis con-
 tineant, junctaque BC per puncta qui-
 dem D & E ipsi BC parallela ducantur
 DF EG; per D vero ipsi AB ducatur
 parallela DHK; parallelogrammum igitur
 est utrumque ipsorum FH HH, ac pro-
 pterea DH quidem est aequalis FE, HK
 vero ipsi GB. & quoniam uni laterum
 trianguli DKC, ipsi scilicet KC, parallela
 ducta est HE; erit ut CE ad ED, ita
 KH ad HD. equalis autem est KH qui-
 dem ipsi FE, HD vero ipsi GF. est igitur
 ut CE ad ED, ita BG ad GF. similis quoniam uni lat-
 erum trianguli AGE, minimum ipsi EG, parallela ducta est
 FD, ut ED ad DA, ita erit GF ad FA. sed ostensum est ut
 CE ad ED, ita esse BG ad GF. ut igitur CE ad ED, ita est
 BG ad GF, & ut ED ad DA, ita GF ad FA. ergo data
 recta linea infecta AB, data recte lineae sectae AC similiter
 secta est. Quod facere oportebat.

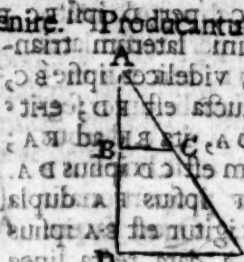


PROP. XI. PROBL.

*Duabus datis rectis lineis tertiam proportionalem in-
 venire.*

Sint datae duae rectae lineae AB AC, & ponantur ita
 ut angulum quemvis contineant, oportet ipsis AB AC
 tertiam

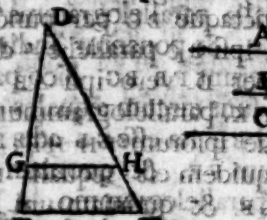
temperam proportionalem invenire. Proponantur AB & AC ad puncta D & E : ponaturque ipsi A c equalis BC ; & juncta BC , ducatur per A ipsi BC parallela DE . quoniam igitur uni laterum trianguli ADE , videlicet ipsi DE parallela ducta est BC , erit ut AB ad BD , ita AC ad CE equalis autem est BD ipsi AC , ut igitur AB ad AC , ita est AC ad CE . quare datis rectis lineis AB & AC tertia proportionalis inventa est CE . Quod facere oportebat.



PROP. XII. PROBL.

Tribus datis rectis lineis quartam proportionalem invenire.

Sint datae tres rectae lineae A & B & C . oportet ipsas A & B & C quartam proportionalem invenire. Exponantur duae rectae lineae DE & DF angulum quemvis E & F continentes; & ponatur ipsi quidem A equalis DC , ipsi vero B equalis CE , & ipsi C equalis DH ; junctaque CH ; per G ipsi DE parallela ducatur EF . itaque quoniam uni laterum trianguli DEH , nimirum ipsi DE , parallela ducta est CH , erit ut DG ad GE ita DH ad HE est autem DC ipsi A equalis GE vero equalis B , & DH equalis C , ut igitur A ad B ita C ad HE , quare datis tribus rectis lineis A & B & C quarta proportionalis inventa est HE . Quod facere oportebat.



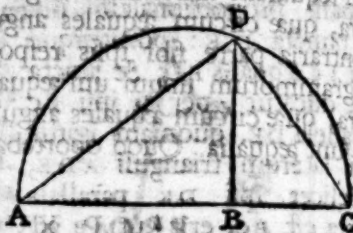
PROP. XIII. PROBL.

Quibus datis rectis lineis mediam proportionalem invenire.

Sint datae duae rectae lineae A & B . oportet inter ipsas A & B mediam proportionalem invenire. Ponantur in directum, & super ipsa A & B describatur semicirculus ADC , ducaturque A puncto B ipsi A & B ad rectos angulos B & D , & AB & BD jungantur. Quoniam igitur in semicirculo est angulus A & B & C rectus est, & quoniam in triangulo rectan-

Cor. 8.
hujus.

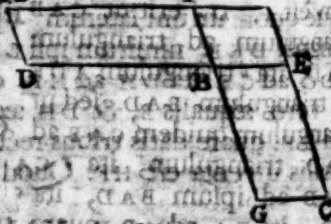
gulo ADC , ab angulo recto ad basim perpendicularis ducta est DB , erit DB media proportionalis inter segmenta basis AB BC , duabus igitur datis rectis lineis AB BC media proportionalis inventa est. Quod facere oportebat.



PROP. XIV. THEOR.

Aequalium, & unum uni aequalem habentium angulum, parallelogrammorum latera quae sunt circum aequales angulos, reciproca sunt: Et quorum parallelogrammorum unum uni aequalem habentium angulum, latera quae circum aequales angulos, sunt reciproca; ea inter se sunt aequalia.

Sint aequalia parallelogramma AB BC , aequales habentia angulos ad B , & ponantur indirectum DB BE . ergo & indirectum erunt FB BC . dico parallelogrammorum AB BC latera quae sunt circum aequales angulos reciproca esse: hoc est ut DB ad BE ita esse CB ad BF . Compleatur enim parallelogrammum FE . & quoniam parallelogrammum AB aequale est parallelogrammo A BC , aliud autem aliquod est FE parallelogrammum, erit ut AB ad FE , ita BC ad FE sed ut AB quidem ad FE , ita est DB ad BE ; ut autem BC ad FE , ita CB ad BF ; ut igitur DB ad BE , ita CB ad BF . ergo parallelogrammorum AB BC latera quae circum aequales angulos ex contraria parte sibi ipsis respondent. Itaque reciproca sunt seu ex contraria parte sibi ipsis respondeant latera quae sunt circum aequales angulos, sit nempe ut BD ad BE , ita GB ad BF , dico parallelogrammum AB parallelogrammo BC aequale esse. quoniam enim est ut DB ad BE , ita CB ad BF , ut autem DB ad BE , ita AB parallelogrammum ad parallelogrammum FE , & ut CB ad BF , ita BC parallelogrammum ad parallelogrammum FE ; erit & ut AB ad FE , ita BC ad FE . aequale igitur est AB parallelogrammum parallelogrammo BC . Ergo aequalium & unum



uni æqualem habentium angulum parallelogrammorum latera, quæ circum æquales angulos, reciproca sunt seu ex contraria parte sibi ipsis respondent, & quorum parallelogrammorum unum uni æqualem habentium angulum latera, quæ circum æquales angulos, reciproca sunt; ea inter se sunt æqualia. Quod oportebat demonstrare.

PROP. XV. THEOR.

Æqualium, & unum uni æqualem habentium angulum triangulorum latera quæ circum æquales angulos, angulos, sunt reciproca. Et quorum triangulorum unum uni æqualem habentium angulum latera, quæ circum æquales angulos reciproca sunt, ea inter se sunt æqualia.

Sint triacula ABC ADE unum angulum uni angulo æqualem habentia, angulum scilicet BAC angulo DAE . dico triangulorum ABC ADE latera quæ circum æquales angulos reciproca esse, hoc est ut CA ad AD , ita esse EA ad AB . ponantur enim ita ut indirectum sit CA ^{434 primi.} ipsi AD . ergo & EA ipsi AB indirectum erit; & jungatur BD . quoniam igitur ABC æquale est triangulo ADE , aliud autem est ABD ; erit ut CAB triangulum ad triangulum BAD , ita $\triangle$ triangulum ADE ad triangulum BAD . sed ut triangulum quidem CAB ad BAD triangulum, ita $\triangle$ CA ad AD , ut autem triangulum EAD ad ipsum BAD , ita $\triangle$ EA ad AB . ut igitur CA ad AD , ita EA ad AB . quare triangulorum ABC ADE latera quæ circum æquales angulos reciproca sunt. Et si reciproca sunt latera triangulorum ABC ADE , scil. sit ut CA ad AD , ita EA ad AB . dico triangulum ABC triangulo ADE æquale esse. juncta enim rursus BD , quoniam ut CA ad AD , ita est EA ad AB , ut autem CA ad AD , ita $\triangle$ ABC triangulum ad triangulum BAD ; & ut EA ad AB , ita $\triangle$ triangulum EAD ad BAD triangulum, erit ut ABC triangulum ad triangulum BAD , ita triangulum EAD ad BAD triangulum. utrumque igitur triangulorum ABC ADE ad triangulum BAD eandem habet proportionem; ac propterea æquale est ABC triangulum

gulum triangulo ABC & DEF equalium igitur, & unum unius
qualeque habentium angulum triangulorum latera quae de
cunt aequales angulos reciproca sunt, & quorum triangulo
rum unum uni aequalem habentium angulum latera quae
circum aequales angulos reciproca sunt, ea inter se sunt
qualia: Quod demonstrare oportebat.

PROP. XVI. THEOR.

Si quatuor rectae lineae proportionales fuerint, rectangulum sub extremis contentum aequale est ei rectangulo quod sub mediis continetur. Et si rectangulum sub extremis contentum aequale fuerit ei quod sub mediis continetur, quatuor rectae lineae proportionales erunt.

Sint quatuor rectae lineae proportionales AB CD E F , sitque ut AB ad CD , ita E ad F . dico rectangulum contentum sub rectis lineis AB F aequale esse ei quod sub ipsis CD E continetur. ducantur enim a punctis A C ipsis AB CD ad rectos angulos AG CH ; ponaturque ipsi quidem F aequalis AG , ipsi vero E aequalis CH , & compleantur BC DH parallelogramma. Quoniam igitur est ut AB ad CD , ita E ad F ; est autem E aequalis CH , & F ipsi AG : erit ut AB ad CD , ita CH ad AG . BC DH latera quae sunt circum aequales angulos reciproca sunt; quoniam autem parallelogrammorum latera quae sunt circum aequales angulos reciproca sunt, ea inter se sunt aequalia, ergo parallelogrammum BC aequale est parallelogrammo DH , quae est parallelogrammum quidem AG , quod sub rectis lineis AB F continetur, etenim AG est aequalis F , parallelogrammum vero DH quod continetur sub ipsis CD E , cum CH ipsi E sit aequalis, rectangulum igitur contentum sub AB & F est aequale ei quod sub ipsis CD & E continetur. Et si rectangulum contentum sub AB F sit aequale ei quod sub CD & E continetur, dico quatuor rectas lineas proportionales esse, videlicet ut AB ad CD , ita E ad F . iisdem enim constructis quoniam rectangulum contentum sub AB & F est aequale ei quod sub CD & E continetur, atque est contentum

14. hujus.

A I

contentum quidem sub $A B$ rectangulum $A B C$ etenim $A B$ est aequalis $B C$ contentum vero sub $B C$ est rectangulum $B C D$ quod $B C$ ipsi B sit aequalis. $A B C$ parallelogrammum $A B C D$ aequale parallelogrammo $A B C D$ & sunt aequiangula aequali-
um autem $B C$ aequiangulorum parallelogrammorum latera, quae circum aequales angulos reciproca sunt. $A B$ quare ut $A B$ ad $C D$, ita $C H$ ad $A G$, aequalis autem est $C H$ ipsi E , & $A G$ ipsi F . ut igitur $A B$ ad $C D$, ita E ad F . Ergo si quatuor rectae lineae proportionales fuerint, rectangulum sub extremis contentum aequale est ei quod sub mediis continetur, & si rectangulum sub extremis contentum aequale fuerit ei quod sub mediis continetur, quatuor rectae lineae proportionales erunt. Quod oportebat demonstrare.

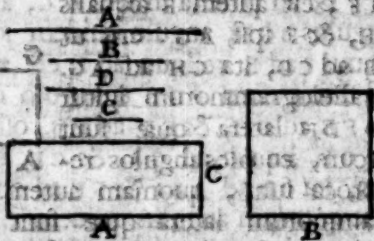
14. hujus.

PROP. XVII. THEOR.

Si tres rectae lineae proportionales fuerint, rectangulum sub extremis contentum aequale est ei quod a media fit quadrato. Et si rectangulum sub extremis contentum aequale fuerit ei quod a media fit quadrato, tres rectae lineae proportionales erunt.

Sint tres rectae lineae proportionales $A B C$: & sit A ad B , ita B ad C : dico rectangulum contentum sub $A C$ aequale esse ei quod a media B fit quadrato. ponatur ipsi B aequalis D . Et quoniam ut A ad B , ita B ad C , aequalis autem B ipsi D ; erit ut A ad B , ita D ad C . si autem quatuor rectae lineae proportionales fuerint rectangulum sub extremis contentum est $A C$ aequale ei quod sub mediis continetur. ergo rectangulum sub $A C$ contentum est.

7. quinti.



16. hujus.

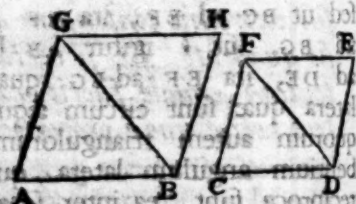
aequale ei quod continetur sub $B D$. sed rectangulum contentum sub $B D$ est aequale quadrato quod fit ex ipsa B ; etenim B est aequalis D . rectangulum igitur contentum sub $A C$ est aequale ei quod ex B fit quadrato. Et si rectangulum contentum sub $A C$ aequale sit quadrato quod fit ex B . dico ut A ad B , ita esse B ad C . videm enim constructis quoniam rectangulum contentum sub $A C$ aequale est quadrato quod fit ex B ; at quadratum quod fit ex B est rectangulum quod sub ipsis $B D$ continetur. est enim B aequalis ipsi D ; erit rectangulum contentum sub $A C$ aequale ei quod sub $B D$ continetur. si autem rectangulum sub extremis contentum aequale fuerit ei quod sub mediis continetur, quatuor rectae lineae proportionales

portionales & erunt. est igitur ut A ad B , ita C ad D ; & equalis autem B ipsi D ; ergo ut A ad B , ita C ad E . Si igitur tres rectæ lineæ proportionales fuerint, rectangulum sub extremis contentum est æquale ei quod à media fit quadrato. Et si rectangulum extremis contentum æquale fuerit ei quod à media fit quadrato, tres rectæ lineæ proportionales erunt. Quod oportebat demonstrare.

PROP. XVIII. PROBL.

A data recta linea dato rectilineo simile, & similiter positum rectilineum describere.

Sit data recta linea AB , datum autem rectilineum CE . oportet à recta linea AB rectilineo CE simile, & similiter positum rectilineum describere. Jungatur DE , & ad rectam lineam AB , & ad puncta in ipsa AB , angulo quidem C æqualis angulus A constituatur GAB , angulo autem CDF angulus ABG . reliquus igitur CFD angulus reliquo AGB est & æqualis. ergo æquiangulum est FCD triangulum triangulo GAB ; ac propterea, ut FD ad GB , ita FC ad GA , & CD ad AB . rursus constituatur ad rectam lineam BC , & ad puncta in ipsa BC , angulo quidem DFE æqualis angulus BGH , angulo quidem FDE æqualis GBH . ergo reliquus ad E reliquo ad H est æqualis. æquiangulum igitur est triangulum FDE triangulo GBH . quare ut FD ad GB , ita FE ad GH , & ED ad HB . ostensum autem est & ut FD ad GB , ita FC ad GA , & CD ad AB : & ut igitur FC ad AG , ita CD ad AB ; & FE ad GH , & adhuc ED ad HB . itaque quoniam angulus quidem CFD est æqualis angulo AGB ; angulus autem DFE angulo BGH . erit totus CFE angulus toti AGH æqualis. eadem ratione & CDE est æqualis ipsi AHB , & præterea angulus quidem ad C angulo ad A æqualis, angulus vero ad E angulo ad H . æquiangulum igitur est AH ipsi CE , & latera circum æquales ipsius angulos habet proportionalia, ergo rectilineum AH rectilineo CE simile erit: A data igitur recta linea AB dato rectilineo CE simile, & similiter positum rectilineum AH descriptum est. Quod facere oportebat.



PROP.

PROP. XIX. THEOR.

Similia triangula inter se sunt in duplicata proportionem laterum homologorum.

Sint similia triangula ABC DEF habentia angulum ad B æqualem angulo ad E, & sit ut AB ad BC, ita DE ad EF, ita ut latus BC homologum sit lateri EF. Dico ABC triangulum ad triangulum DEF duplicatam proportionem habere ejus quam habet BC ad EF. Sumatur enim ipsis BC EF tertia proportionalis BG, ut sit BC ad EF, ita EF ad BG. & jungatur GA. quoniam igitur ut AB ad BC, ita est DE ad EF; erit permutando ut AB ad DE, ita BC ad EF. sed ut BC ad EF, ita EF ad BG. ut igitur AB B



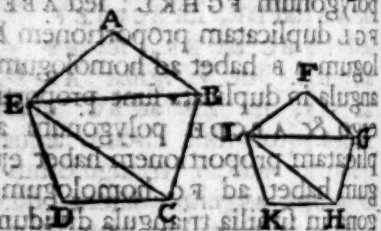
ad DE, ita EF ad BG. quare triangulorum ABG DEF latera quæ sunt circum æquales angulos reciproca sunt. quorum autem triangulorum unum uni æqualem habentium angulum latera quæ circum æquales angulos reciproca sunt, ea inter se æqualia sunt. æquale igitur est ABG triangulum triangulo DEF. & quoniam est ut BC ad EF, ita EF ad BG; si autem tres rectæ lineæ proportionales sint, prima ad tertiam duplicatam proportionem habet ejus quam habet ad secundam: habebit igitur BC ad BG duplicatam proportionem ejus quam habet BC ad EF. ut autem BC ad BG, ita ABC triangulum ad triangulum ABG. ergo & ABC triangulum ad triangulum ABG duplicatam proportionem habet ejus quam BC habet ad EF. est autem ABG triangulum triangulo DEF æquale. & triangulum igitur ABC ad triangulum DEF duplicatam proportionem habebit ejus quam habet BC ad EF. Quare similia triangula inter se in duplicata sunt proportionem laterum homologorum. Quod ostendere oportebat.

Cor. Ex hoc manifestum est, si tres rectæ lineæ proportionales fuerint, ut prima ad tertiam, ita esse triangulum, quod sit à prima ad triangulum quod à secunda simile, & similiter descriptum; quoniam ostensum est ut cæ ad bæ, ita ABC triangulum ad triangulum ABG, hoc est ad triangulum DEF. Quod ostendere oportebat.

PROP. XX. THEOR.

Similia polygona in similia triangula diuiduntur, & numero equalia, & homologa totis; & polygonum ad polygonum duplicatam proportionem habet, eam quam latus homologum habet ad homologum latus.

Sint similia polygona $ABCDEFGHKL$, & sit AB homologum ipsi FG . dico polygonum $ABCDEFGHKL$ in similia triangula diuidi, & numero equalia, & homologa totis; & polygonum $ABCDE$ ad polygonum $FGHKL$ duplicatam proportionem habere ejus quam habet AB ad FG . jungantur BE EC GL LH . Et quoniam simile est $ABCDE$ polygonum polygono $FGHKL$, angulus BAE angulo GFL est equalis: atque est ut BA ad AE , ita GF ad FL . quoniam igitur duo triangula sunt ABE FGL unum angulum unum angulo equalem habentia; circum equales autem angulos latera proportionalia: **6. hujus.** erit $\triangle ABE$ triangulum $\triangle FGL$ equiangulum. ergo & simile. angulus igitur ABE equalis est angulo FGL est autem & totus ABC angulus equalis toti FGH , propter similitudinem polygonorum. ergo reliquus EBC reliquo LGH est equalis. & quoniam ob similitudinem triangulorum ABE FGL est ut EB ad BA , ita LG ad GF . sed & propter similitudinem polygonorum, ut AB ad BC , ita est FG ad GH ; erit ex **21. quinti.** quali ut EB ad BC , ita LG ad GH . hoc est circum equales angulos EBC LGH latera sunt proportionalia; equiangulum igitur est EBC triangulum triangulo LGH . quare & simile. eadem ratione & ECD triangulum simile est triangulo LHK . similia igitur polygona $ABCDE$ $FGHKL$ in similia triangula diuiduntur, & numero equalia: dico & homologa totis, hoc est ut proportionalia sint triangula, & antecedentia quidem sunt ABE EBC ECD , consequentia autem ipsorum FGL LGH LHK . & $ABCDE$ polygonum ad polygonum $FGHKL$ duplicatam proportionem habere ejus quam latus homologum habet ad homologum latus; hoc est AB ad FG . quoniam enim simile est ABE triangulum triangulo FGL , habebit ABE triangulum ad triangulum FGL duplicatam proportionem ejus quam habet BE ad GL . eadem ratione, **19. hujus.** & triangulum BEC ad LGH triangulum duplicatam proportionem habet ejus quam BE ad GL . est igitur ut ABE trian-



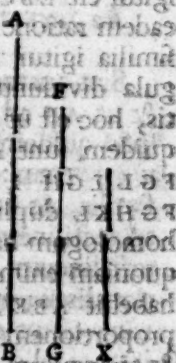
triangulum ad triangulum FGL, ita triangulum BEC ad GLH triangulum. Cuius quoniam simile est triangulum EBC triangulo LGH, habebit EBC triangulum ad triangulum LGH duplicatam proportionem ejus quam recta linea CE habet ad rectam HL. eadem ratione & ECD triangulum ad triangulum LHK duplicatam proportionem habet ejus quam CD ad HL. est igitur ut triangulum BEC ad triangulum LGH, ita CED triangulum ad triangulum LHK. ostensum autem est & ut EBC triangulum ad triangulum LGH, ita triangulum ABE ad triangulum FGL, ergo ut triangulum ABE ad triangulum FGL, ita triangulum BEC ad GLH triangulum, & triangulum ECD ad ipsum LHK. & igitur ut unum antecedentium ad unum consequentium, sic ^{12 quinti.} omnia antecedentia ad omnia consequentia, ergo ut triangulum ABE ad triangulum FGL, ita ABCDE polygonum ad polygonum FGHLK: sed ABE triangulum ad triangulum FGL duplicatam proportionem habet ejus quam latus homologum AB habet ad homologum latus FG: similia enim triangula in duplicata sunt proportionem laterum homologorum, ergo & ABCDE polygonum ad polygonum FGHLK duplicatam proportionem habet ejus quam AB latus homologum habet ad FG homologum latus. Similia igitur polygonum in similia triangula dividuntur, & numero aequalia, & homologa totis; & polygonum ad polygonum duplicatam habet proportionem ejus quam habet latus homologum ad homologum latus. Quod oportebat demonstrare.

Eodem modo & in similibus quadrilateris ostendetur ea esse in duplicata proportionem laterum homologorum. ostensum autem est & triangulis.

COROLL.

Ergo, univ[er]se similes figurae rectilinae inter se sunt in duplicata proportionem homologorum laterum; & si ipsis AB FG tertiam proportionalem sumamus, quae sit x; habebit A ad x duplicatam proportionem ejus quam habet AB ad FG, habet autem & polygonum ad polygonum, & quadrilaterum ad quadrilaterum duplicatam proportionem ejus quam latus homologum habet ad homologum latus, hoc est AB ad FG, atque ostensum est hoc in triangulis.

Univ[er]se igitur manifestum est, si tres rectae linea[rum] propor-



proportionales fuerint, ut prima ad tertiam, ita esse figuram quæ sit à prima, ad eam quæ à secunda, similem & similiter descriptam. Quod ostendere oportebat.

PROP. XXI. THEOR.

Quæ eidem rectilineo sunt similia, & inter se similia sunt.

¶ 1. Diffin.
hujus.

Sit enim utrumque rectilineorum A B simile rectilineo C. dico & rectilineum A rectilineo B simile esse. Quoniam enim simile est A rectilineum rectilineo C, & ipsi æquiangulum erit, & circum æquales angulos latera habebit proportionalia. rursus quoniam simile est rectilineum B rectilineo C, æquiangulum ipsi erit, & circum æquales angulos latera proportionalia habebit. utrumque igitur rectilineorum A B ipsi C æquiangulum est, & circum æquales angulos latera habet proportionalia. quare & rectilineum A ipsi B est æquiangulum, lateraque circum æquales angulos proportionalia habet; ac propterea A ipsi B est simile. Quod demonstrare oportebat.



PROP. XXII. THEOR.

Si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, & recta linea quæ ab ipsis sunt, similia, & similiter descripta proportionalia erunt. & si rectilinea quæ ab ipsis sunt, similia, & similiter descripta, proportionalia fuerint, & ipsæ rectæ lineæ proportionales erunt.

Sint quatuor rectæ lineæ proportionales A B C D E F G H, & ut A B ad C D, ita sit E F ad G H. describanturque ab ipsis quidem A B C D similia, & similiter posita rectilinea K A B L C D: ab ipsis vero E F G H describantur rectilinea similia, & similiter posita M E F N H. dico ut K A B rectilineum ad rectilineum L C D, ita esse rectilineum M E F ad ipsum N H rectilineum. Sumatur ipsis quidem A B C D tertia proportionalis x; ipsis vero E F G H tertia proportionalis o. & quoniam est ut A B ad C D, ita E F ad G H: ut autem C D ad x, ita G H ad o; erit ex æquali ut A B ad x, ita E F ad o. sed ut A B quidem ad x, ita est & rectilineum K A B ad L C D rectilineum,

¶ 18. hujus.

¶ 11. hujus.

¶ 22. quinti.
¶ Cor. 20.
hujus.

line
line
LC
NH
rect
ita
NH
EF
ita
ip
NH
rect
ut
def
CD
LC
PR
line
line
rect
tili
erg
acu
trun
erit
& f
ut A
erit
line
unt
rect
prop
erit
H
ds
Bo
somp
m
H
-10
-01
Bon
qu
vari
qu

lineum, ut autem EF ad O , ita $\frac{1}{4}$ rectilineum MF ad recti-
lineum NH ut igitur KAB rectilineum ad rectilineum

LCD , ita est $\frac{1}{4}$ rectilineum MF ad
 NH rectilineum. Et si sit ut KAB

rectilineum ad rectilineum LCD ,

ita rectilineum MF ad rectilineum

NH . dico ut AB ad CD , ita esse

EF ad GH . fiat enim ut AB ad CD ,

ita EF ad PR , & describatur ab

ipsa PR alterutri rectilineorum MF

NH simile, & similiter positum

rectilineum SR . quoniam igitur est

ut AB ad CD , ita EF ad PR , &

descripta sunt ab ipsis quidem AB

CD similia, & similiter posita KAB

LCD rectilinea, ab ipsis vero EF

PR similia & similiter posita recti-

linea MF SR , erit $\frac{1}{4}$ ut KAB recti-

lineum ad rectilineum LCD , ita rectilineum MF ad RS

rectilineum: ponitur autem & ut rectilineum KAB ad re-

ctilineum LCD , ita MF rectilineum ad rectilineum NH ,

ergo ut rectilineum MF ad rectilineum NH , ita MF rectili-

neum ad rectilineum SR . quod cum rectilineum MF ad u-

trumque ipsorum NH SR eandem habeat proportionem,

erit rectilineum NH ipsi SR æquale. est autem ipsi simile,

& similiter positum, ergo GH est æqualis PR . & quoniam

ut AB ad CD , ita est EF ad PR : æqualis autem PR ipsi GH ;

erit ut AB ad CD , ita EF ad GH . Si igitur quatuor rectæ

lineæ proportionales fuerint, & rectilinea quæ ab ipsis fi-

unt, similia, & similiter descripta proportionalia erunt: & si

rectilinea quæ ab ipsis fiunt, similia, & similiter descripta

proportionalia fuerint, & ipsæ rectæ lineæ proportionales

erunt. Quod oportebat demonstrare.



11 quinti.

12. hujus.

ex prius
demon-
stratis.

9 quinti.

LEMMA.

Positis tribus rectis quibuscunque A , B & C ; ratio
primæ A ad tertiam C , æqualis est rationi compositæ
ex ratione primæ A ad secundam B , & ratione se-
cundæ B ad tertiam C .

Si V , G , numerus ternarius exponens seu denominator ra-
tionis A ad B , hoc est sit A tripla ipsius B , & sit numerus
quaternarius exponens rationis B ad C , erit numerus duode-
narius ex numeri ternarii & quaternarii multiplicatione
compo-

compositus exponens rationis A ad C, nam quia A continetur
ter, & B continetur quater, continetur A sexies, & B
ter, seu duodecies, idem de aliis multiplicibus vel submulti-
plicibus verum est. Universalis vero hujus Theorematis demon-
stratio talis est. Quantitas rationis A ad B est numerus
scilicet qui multiplicans consequen-
tem producit antecedentem. Et
similiter quantitas rationis B ad
C est $\frac{B}{C}$. Atque hæc duæ quanti-
tates inter se multiplicatæ efficiunt numerum

$$\frac{A \times B}{B \times C}$$

quantitas rationis quam rectangulum comprehensum sub rectis
A & B habet ad rectangulum sub B & C rectis. Adeoque dicta
ratio rectanguli sub A & B, ad rectangulum sub B & C ea est
qua in sensu def. 5. hujus, componitur ex rationibus A ad B
& B ad C, sed per I. 6. rectangulum sub A & B est ad rectan-
gulum sub B & C, ut A ad C, & igitur ratio A ad C æqua-
lis est rationi compositæ ex rationibus A ad B & B ad C.

Positis vero quatuor rectis quibuscunque A, B, C, & D, ratio
primæ A ad quartam D equalis est rationi compositæ ex
ratione primæ A ad secundam B, & ratione secundæ B ad ter-
tiam C, & ratione tertiæ C ad quartam D, mensuræ in
libris 11.

Nam in tribus rectis A, B, & C, ratio A ad B equalis est
ratio A ad D equalis est rationi
compositæ ex rationibus A ad C, & C ad D. Et hætenus est o-
stensum rationem A ad C æqualem
esse rationi compositæ ex ratio-
nibus A ad B, & B ad C. Et igitur
ratio A ad D equalis est rationi compositæ ex rationibus
A ad B, B ad C, & C ad D. Similiter ostendetur, in quocun-
que rectis, rationem primæ ad ultimam æqualem esse rationi
compositæ ex rationibus primæ ad secundam, secundæ ad ter-
tiam, tertiæ ad quartam, & ita deinceps usque ad ultimam.

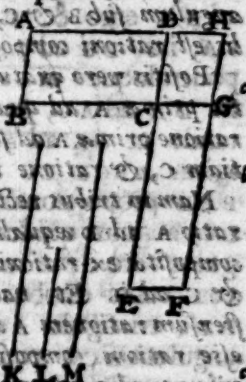
Si exponantur alie magnitudines quælibet, præter rectas
idem obtinebit. Quod constabit si concipiatur tot rectæ
C, & C, ordine posite quot sunt magnitudines. & in eadem
ratione ita viz. ut recta A sit ad rectam B ut prima ad
secundam, & recta B ad rectam C ut secunda
magnitudo ad tertiam, & ita pertrans. Manifestum est per 21.
5. esse ex æquo rectam A ad ultimam rectam sunt primam
magnitudo ad ultimam. Sed ratio rectæ A ad ultimam rectam
æqualis est rationi compositæ ex rationibus A ad B, & B ad C, & C ad D, & ita deinceps.

in partem usque ad ultimam. Et ex hypothesis ratio
cujuslibet recte ad sibi proximam eadem est cum ratio
magnitudinis ejusdem ordinis ad sibi proximam. Et igitur
ratio primae magnitudinis ad ultimam aequalis est rationi com-
positae ex rationibus primae magnitudinis ad secundam, secundam
ad tertiam, & ita deinceps usque ad ultimam. Quod de-
monstrare oportebat.

PROP. XXIII. THEOR.

*Aequiangula parallelogramma inter se proportionem
habent ex lateribus compositam.*

Sint aequiangula parallelogramma AC & CE aequalem ha-
bentia AC angulum angulo EC . dico parallelogrammum
 AC ad parallelogrammum CE proportionem habere com-
positam ex lateribus, videlicet compositam ex proportionem
quam habet AC ad CE , & ex proportionem quam BC habet
ad CF . ponatur enim ut FC sit indire-
ctum ipsi CG . ergo & DC ipsi CG indi-
rectum erit. & compleatur DE paral-
lelogrammum exponaturque recta LI
neae quaedam, & fiat ut BC ad CE , ita
 KL ad L , ut autem DE ad CE , ita LM ad
 M . proportionem igitur ipsius K ad L , &
 L ad M eadem sunt quae proportionem
laterum videlicet BC ad CE , & DC ad
 CF . sed proportio K ad M composita
est ex proportionem K ad L , & propor-
tionem L ad M . quare & K ad M propor-
tionem habet ex lateribus compositam
& quoniam est ut BC ad CE , ita AC parallelogrammum
ad parallelogrammum CH ; sed ut BC ad CE , ita K ad L
enim ut K ad L , ita parallelogrammum AC ad CH paral-
lelogrammum. rursus quoniam est ut DC ad CF , ita DE pa-
rallelogrammum ad parallelogrammum CF . ut autem DC
ad CF , ita L ad M . ergo ut DE ad CF , ita erit parallelogram-
mum CH ad CF parallelogrammum. itaque cum ostensum
sit ut K quidem ad L , ita AC parallelogrammum ad paral-
lelogrammum CH ; ut autem L ad M , ita parallelogrammum
 CH ad CF parallelogrammum; erit ex aequali ut K ad M
ita AC parallelogrammum ad ipsum CF habet autem K ad
 M proportionem ex lateribus compositam. ergo & AC pa-
rallelogrammum ad parallelogrammum CE proportionem
habebit compositam ex lateribus. Aequiangula igitur paral-
lelogramma



c 14. primi.

c 12. hujus.

c per Lem-

ma supe-

rius.

c 1. hujus.

c 11. quinti.

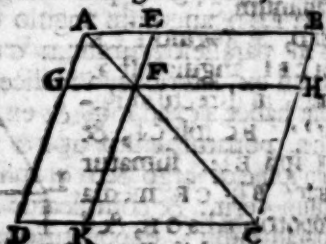
c 10. quinti.

lelogramma inter se proportionem habent ex lateribus compositam. Quod oportebat demonstrare.

PROP. XXIV. THEOR.

Omnis parallelogrammi, quæ circa diametrum sunt parallelogramma & toti, & inter se similia sunt.

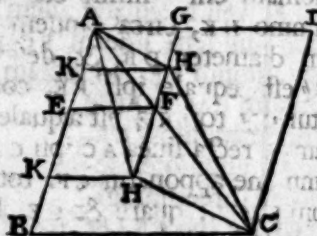
Sit parallelogrammum $ABCD$, cuius diameter AC : circa diametrum vero AC parallelogramma sint EG HK . dico parallelogramma EG HK & toti $ABCD$, & inter se similia esse. Quoniam enim uni laterum trianguli ABC , videlicet ipsi BC parallela ducta est EF , erit $\cdot$ ut BE ad EA , ita CF ad FA . quoniam rursus uni laterum trianguli ACD , nempe ipsi CD ducta est parallela FG , ut CF ad FA , ita $\cdot$ erit DG ad GA . sed ut CF ad FA ita ostensa est & BE ad EA , ergo & ut BE ad EA , ita $\cdot$ DG ad GA , componendoque $\cdot$ ut BA ad AE , ita $\cdot$ DA ad AG , & permutando ut BA ad AD , ita EA ad AG . parallelogrammorum igitur $ABCD$ EG latera quæ circa communem angulum BAD proportionalia sunt. & quoniam parallela est GF ipsi DC , angulus quidem AGF est $\cdot$ æqualis angulo ADC , angulus vero GFA æqualis angulo DCA , & angulus DAC est communis duobus triangulis ADC AGF ; erit triangulum ADC triangulo AGF æquiangulum. eadem ratione & triangulum ACB æquiangulum est triangulo AFE . totum igitur parallelogrammum $ABCD$ parallelogrammo EG est æquiangulum. ergo ut AD ad DC , ita $\cdot$ AG ad GF , ut autem DC ad CA , ita GF ad FA , & ut AC ad CB , ita AF ad FE , & præterea ut CB ad BA , ita FE ad EA . itaque quoniam ostensum est ut DC ad CA , ita esse GF ad FA , ut autem AC ad CB , ita AF ad FE , erit ex æquali ut DC ad CB , ita GF ad FE . ergo parallelogrammorum $ABCD$ EG proportionalia sunt latera quæ circum æquales angulos, ac propterea parallelogrammum $ABCD$ parallelogrammo EG est simile. eadem ratione, & parallelogrammum $ABCD$ simile est parallelogrammo HK . utrumque igitur ipsorum EG HK parallelogrammorum, parallelogrammo $ABCD$ est simile. quæ autem eidem rectilineo sunt similia, & inter se similia sunt. & parallelogrammum igitur EG simile est parallelogrammo HK . Quare omnis parallelogrammi quæ circa diametrum



PROP. XXVI. THEOR.

Si à parallelogrammo parallelogrammum auferatur simile toti, & similiter positum, communem ipsi angulum habens, circa eandem diametrum est toti.

A parallelogrammo enim $ABCD$ parallelogrammum AF auferatur, simile ipsi $ABCD$, & similiter positum, communemque ipsi angulum habens DAB . dico parallelogrammum $ABCD$ circa eandem esse diametrum parallelogrammo AF . non enim, sed si fieri potest, sit ipsorum diameter AHC , & producat GF usque ad H ; ducaturque per H alterutri ipsarum $ADBC$ parallela HK . Quoniam igitur circa eandem diametrum est $ABCD$ parallelogrammum parallelogrammo KG ; & erit parallelogrammum $ABCD$ parallelogrammo KG simile. ergo ut DA ad AB , ita GA ad AK . est autem & propter similitudinem parallelogrammorum $ABCD$, EG , ut DA ad AB , ita GA ad AE . & igitur ut GA ad AE , ita GA ad AK . quod cum GA ad utramque ipsarum AK , AE eandem proportionem habeat; erit DAE ipsi AK æqualis, minor majori, quod fieri non potest. non igitur circa eandem diametrum est $ABCD$ parallelogrammum parallelogrammo AH . quare circa eandem diametrum erit ipsi AF . Si igitur à parallelogrammo parallelogrammum auferatur simile toti, & similiter positum, communem ipsi angulum habens, circa eandem diametrum est toti. Quod demonstrare oportebat.



PROP. XXVII. THEOR.

Omnium parallelogrammorum secundum eandem rectam lineam applicatorum, & deficientium figuris parallelogrammis similibus, & similiter positis, ei quæ à dimidia describitur, maximum est quod ad dimidiam est applicatum, simile existens defectui.

Sit recta linea AB ; seceturque bifariam in C ; & ad AB rectam lineam applicetur parallelogrammum AD deficientis figura parallelogramma CE , simili & similiter posita ei quæ à dimidia ipsius AB descripta est. dico omnium paralle-

parallelogrammorum ad rectam lineam AB applicatorum, & deficientium figuris parallelogrammis similibus, & similiter positis ipsi CE , maximum esse AD . Applicetur enim ad rectam lineam AB parallelogrammum AF , deficiens figura parallelogramma HK simili, & similiter posita ipsi CE . dico AD parallelogrammum parallelogrammo AF majus esse.



Quoniam enim simile est parallelogrammum CE parallelogrammo HK , circa eandem diametrum sunt. ducatur eorum diameter DE , & describatur figura. quoniam igitur CF est æquale ipsi FE , commune apponatur HK . totum igitur CH toti KE est æquale. sed CH est æquale CG , quoniam & recta linea AC ipsi CB . ergo & GC ipsi EX æquale est commune apponatur CF . totum igitur AF est æquale gnomoni LMN : quare & CE , hoc est AD parallelogrammum parallelogrammo AF est majus. Omnium igitur parallelogrammorum secundum eandem rectam lineam applicatorum, & deficientium figuris parallelogrammis similibus, & similiter positis ei quæ a dimidia describitur, maximum est quod ad dimidiam est applicatum. Quod demonstrare oportebat.

PROP. XXVIII. PROBL.

Ad datam rectam lineam dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare, deficiens figura parallelogramma quæ similis sit alteri datæ. oportet autem datum rectilineum, cui æquale applicandum est, non majus esse eo quod ad dimidiam applicatur; similibus existentibus defectibus, & eo quod a dimidia, & eo, cui oportet simile deficere.

Sit data quidem recta linea AB : datum autem rectilineum, cui oportet æquale ad datam rectam lineam AB applicare, sit c non majus existens eo quod ad dimidiam applicatum est, similibus existentibus defectibus: cui autem oportet simile deficere sit D . oportet ad datam rectam lineam AB , dato rectilineo c æquale parallelogrammum applicare, deficiens figura parallelogramma, quæ similis sit ipsi D . Secetur AB bisariam in e , & ab ipsa EB describatur simile, & similiter positum ipsi D : quod sit EFG , & compleatur AE parallelogrammum. itaque AG vel æquale est ipsi c , vel eo majus,

ob determinationem; & si quidem AG sit æquale c , factum jam erit quod proponebatur: etenim ad rectam lineam AB dato rectilineo c æquale parallelogrammum AG applicatum est, deficiens figura parallelogramma EF ipsi D simili. si autem non est æquale, erit HE majus quam c ; atque EF æquale est HE . ergo, & EF quam c est majus. quo autem EF superat c , ei excessui æquale, ipsi vero D simile & similiter positum, idem constituatur $KLMN$. sed D est simile EF , quare & KM ipsi EF simile erit. sit igitur recta linea KL homologa ipsi GE , LM vero ipsi GF . & quoniam æquale est EF ipsis c & KM , erit EF ipso KM majus. major igitur est recta linea GE ipsa KL ; & GF ipsa LM . ponatur GO æqualis KL , & GO æqualis LM , & compleatur XGO parallelogrammum. æquale igitur est & simile XO ipsi KM . sed KM simile est EF . ergo & XO ipsi EF est simile. circa eandem igitur est diametrum XO ipsi EF . sit ipsorum diametrum GPR , & figura describatur. itaque quoniam EF est æquale ipsis c & KM simul, quorum XO est æquale KM , erit reliquus $Y\phi\psi$ gnomon æqualis reliquo c . & quoniam OB est æquale XS , commune apponatur SR . totum igitur OB toti XB est æquale. sed XB est æquale TE , quoniam & lat. s AE lateri EB . quare & TE ipsi OB æquale. commune apponatur XS . ergo totum TS est æquale toti gnomoni $Y\phi\psi$. at $Y\phi\psi$ gnomon ipsi c ostensus est æqualis: & TS igitur ipsi c æquale erit. Quare ad datam rectam lineam AB , dato rectilineo c , æquale parallelogrammum TS applicatum est, deficiens figura parallelogramma SR ipsi D simili, quoniam & SR simile est ipsi GB . Quod facere oportebat.

PROP. XXIX. PROBL.

Ad datam rectam lineam dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare, excedens figura parallelogramma, quæ similis sit alteri datæ.

Sit data recta linea AB , datum vero rectilineum, cui oportet æquale ad ipsam AB applicare, sit c ; cui autem oportet simile excedere D . oportet ad AB rectam lineam dato rectilineo c æquale parallelogrammum applicare, excedens figura

PROP. XXX. PROBL.

*Datam rectam lineam terminatam extrema ac media
ratione secare.*

¶ Sit data recta linea terminata AB . oportet ipsam AB extrema ac media ratione secare. Describatur $\ast$ ex AB quadratum BC , & ad AC ipsi BC æquale parallelogrammum applicetur CD , excedens $\ast$ figura AD ipsi BC simili. quadratum autem est BC . ergo & AD quadratum erit. & quoniam BC est æquale CD ; commune auferatur CB . reliquum igitur BF reliquo AD est æquale; est autem & ipsi æqui-
angulum. ergo ipsorum BF & AD latera quæ circum æquales
angulos

e 14. hujus

d 3. primi.

e 14. quinti.

f 11. secundum.

g 17. hujus.

e 8. hujus.

3 Cor. 20. hujus.

f 11. quinti.

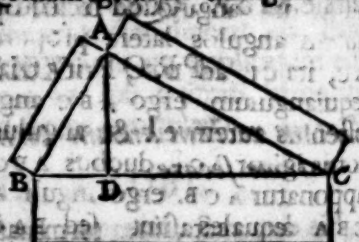
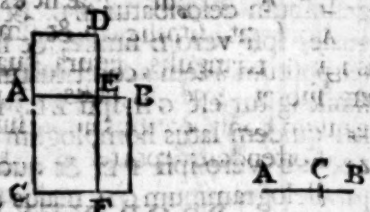
angulos reciproce sunt proportionalia. ut igitur FE ad
 AD. ita est AE ad AB. hoc
 autem est equalitas. hoc
 est ipsi AB. & ED ipsi AE.
 quare ut BA ad AE. ita AE
 ad ED. sed AB maior est
 quam AE. ergo AE quam
 EB est major. recta igitur
 linea AB extrema ac media
 ratione secta est in E. & majus ipsius segmentum est AE.
 Quod facere oportebat.

Aliter. Sit data recta linea AB. oportet ipsam AB ex-
 trema ac media ratione secare. Secetur enim AB in C, ita ut
 rectangulum quod continetur sub AB BC aequale sit qua-
 drato ex AC. quoniam igitur rectangulum sub AB BC a-
 quale est quadrato ex AC, erit ut BA ad AC ita AC ad CB,
 ergo AB recta linea extrema ac media ratione secta est.
 Quod facere oportebat.

PROP. XXXI. THEOR.

*In rectangulis triangulis figura quae fit à latere rectum
 angulum subtendente, aequalis est eis quae à lateri-
 bus rectum angulum continentibus sunt, similibus,
 & similiter descriptis.*

Sit triangulum rectangulum ABC, rectum habens angu-
 lum BAC. dico figuram, quae fit ex BC aequalem esse eis
 quae ex BA AC sunt similibus, & similiter descriptis. du-
 catur perpendicularis AD. Quoniam igitur in triangulo rect-
 angulo ACB ab angulo re-
 cto, qui est ad A, ad BC ba-
 sim perpendicularis ducta
 est AD, erunt triangu-
 la ABD ADC quae sunt ad
 perpendicularem similia to-
 ti ABC, & inter se. &
 quoniam simile est ABC tri-
 angulum triangulo ABD, erit ut CB ad BA, ita BA ad
 AD, quod cum tres rectae lineae proportionales sint, ut prima
 ad tertiam, ita erit figura quae fit ex prima ad eam quae ex
 secunda, similem, & similiter descriptam. ut igitur CB ad
 BD, ita figura quae fit ex CB ad eam quae ex BA, similem
 & similiter descriptam. eadem ratione, & ut BE ad CB, ita
 figura quae fit ex BE ad eam quae ex CA. quare & ut BE ad
 ipsas,



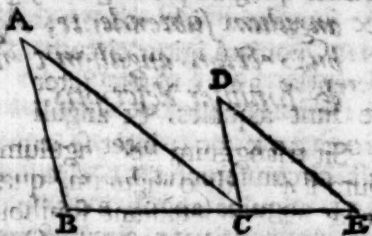
ipsas BD DC , ita & figura quæ ex BC ad eas quæ ex BA AC ,
 similes, & similiter descriptas. æqualis autem est BC ipsis
 BD DC . ergo figura quæ fit ex BC æqualis est eis quæ ex
 BA AC fiunt, similibus, & similiter descriptis. in rectangu-
 lis igitur triangulis, figura quæ fit à latere rectum angu-
 lum subtendente, æqualis est eis quæ à lateribus rectum
 angulum continentibus fiunt, similibus, & similiter descriptis.
 Quod ostendere oportebat.

PROP. XXXII. THEOR.

*Si duo triangula componantur ad unum angulum, quæ
 duo latera duobus lateribus proportionalia habeant,
 ita ut homologa latera ipsorum etiam sint parallela,
 reliqua triangulorum latera in directum sibi ipsis
 constituta erunt.*

Sint duo triangula ABC DCE quæ duo latera BA AC
 duobus lateribus CD DE proportionalia habeant, scil. sit si-
 cut BA ad AC , ita CD ad DE ; parallela autem sit AB ipsi
 DC & AC ipsi DE . dico BC ipsi CE in directum esse. Quo-
 niam enim AB parallela est DC , & in ipsas incidit recta li-
 nea AC ; erunt & anguli al-

terni BAC ACD æquales
 inter se. eadem ratione,
 & angulus CDE æqualis est
 angulo ACD ; quare & BAC
 ipsi CDE est æqualis. &
 quoniam duo triangula sunt
 ABC DCE , unum angulum



19. primi.

ad A , uni angulo ad D æqualem habentia, circum æquales
 autem angulos latera proportionalia, quod sit ut BA ad
 AC , ita CD ad DE ; erit & triangulum ABC triangulo DCE 66. hujus.
 æquiangulum. ergo ABC angulus est æqualis angulo DCE .
 ostensus autem est & angulus ACD æqualis angulo BAC .
 totus igitur ACE duobus ABC BAC est æqualis. communis
 apponatur ACB , ergo anguli ACE ACB angulis BAC ACB
 CBA æquales sunt. sed BAC ACB CBA anguli duobus
 rectis sunt æquales. & anguli igitur ACE ACB duobus re-
 ctis æquales erunt. itaque ad quandam rectam lineam AC ,
 & ad punctum in ipsa C , duæ rectæ lineæ BC CE non ad
 eandem partes posite, angulos qui deinceps sunt ACE ACB
 duobus rectis æquales efficiunt. ergo BC ipsi CE in directum
 erit. Si igitur duo triangula componantur ad unum angu-
 lum, quæ duo latera duobus lateribus proportionalia habe-

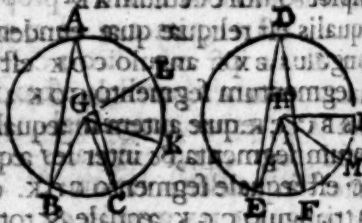
14. primi.

ant, ita ut homologa latera ipsorum etiam sint parallela; reliqua triangulorum latera in directum sibi ipsis constituta erunt. Quod demonstrare oportebat.

PROP. XXXIII. THEOR.

In circulis equalibus anguli eandem habent proportionem, quam circumferentie quibus insistant, siue ad centra, siue ad circumferentias insistant: adhuc autem & sectores, quippe qui ad centra sunt constituti.

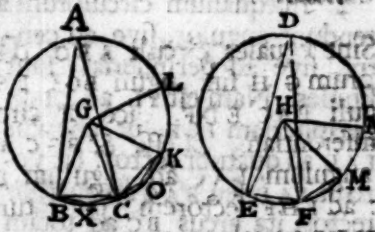
Sint equales circuli ABC DEF ; & ad centra quidem ipsorum G H sint anguli BGC EHF ; ad circumferentias vero anguli BAC EDF . dico ut circumferentia BC ad EF circumferentiam, ita esse & BGC angulum ad angulum EHF ; & angulum BAC ad angulum EDF . & adhuc sectorem BGC ad EHF sectorem. ponantur enim circumferentie quidem BC equales quocunque demum CK KL ; circumferentie vero EF ; rursus equales quocunque FM MN ; & jungantur CK CL HM HN . Quoniam igitur circumferentie BC CK KL inter se sunt equales, & anguli



27. tertii. BGC GCK KGL inter se equales erunt. quod duplex igitur est circumferentia BL circumferentie BC ; totuplex est & BGL angulus anguli BGC . eadem ratione & quoduplex est circumferentia NE circumferentie EF ; totuplex & EHN angulus anguli EHF . si vero equalis est BL circumferentia circumferentie EN ; & angulus BGL angulo EHN erit equalis; & si circumferentia BL maior est circumferentia EN , maior erit & BGL angulus angulo EHN ; & si minor, minor quatuor igitur existentibus magnitudinibus, duabus nimirum circumferentiis BC EF ; & duobus angulis BGC EHF sumptis sunt circumferentie quidem BC ; & BGC angulus; circumferentie vero EF ; & EHF anguli aequemultiplicia, videlicet circumferentia BC & BGC angulus, nempe circumferentia EN ; & angulus EHN ; atque ostensum est si circumferentia BL superat circumferentiam EN ; & BGL angulum superare angulum EHN ; & si equalis, equalem; & si minor, minorem esse. ut igitur circumferentia BC ad EF circumferentiam, ita angulus BGC ad angulum EHF . sed ut BGC angulus ad angulum EHF , ita angulus

Diffin. 5.
quinci.

angulus $\angle A$ ad $\angle D$ angulum. uterque enim utriusque
est duplex. ut igitur $\angle B$ circumferentia ad circumfere-
ntiam EF , ita & angulus $\angle B$ ad angulum $\angle E$, & angulus
 $\angle C$ ad $\angle F$, angulum. quare in circulis æqualibus anguli
eandem habent proportionem quam circumferentiæ qui-
bus insunt, sive ad centra, sive ad circumferentias in-
sistant. dico insuper & ut $\angle B$ circumferentia ad circumfere-
ntiam EF ita esse sectorem GBC ad HFE sectorem. Jun-
gantur enim AC CK , & sumptis in circumferentiis BC CK
punctis X O , jungantur & BX XC CO OK itaque quoniam
duæ BG GC duabus CG GK æquales sunt, & angulos æqua-
les continent; erit & basis



4 primi.

BC basi CK æqualis. æquale
igitur est GBC triangulum
triangulo GCK . & quoniam
circumferentia BC circum-
ferentiæ CK est æqualis, &
reliqua circumferentia quæ
complet totum circulum $AB-$
 C æqualis est reliquæ quæ eundem circulum complet. quare
& angulus $\angle BXC$ angulo $\angle COK$ est æqualis, simile igitur est $B-$
 XC segmentum segmento COK : & sunt in æqualibus rectis
lineis BC CK quæ autem in æqualibus rectis lineis similia cir-
culorum segmenta, & inter se æqualia sunt. ergo segmentum
 BXC est æquale segmento COK . est autem & BGC triangu-
lum triangulo GCK æquale. & totus igitur sector BGC sectori
 GCK æqualis erit. eadem ratione & GKL sector utrique ipso-
rum GKC GCB est æqualis. tres igitur sectores BGC GCK GKL
æquales sunt inter se. similiter & sectores HFE HFM HMN
inter se sunt æquales. quotuplex igitur est LB circumfere-
ntia circumferentiæ BC , totuplex est & GBL sector sectoris
 GBC . eadem ratione & quotuplex est circumferentia NE
circumferentiæ EF , totuplex est & HEN sector sectoris
 HEF . Sed si circumferentia BL circumferentiæ EN est æ-
qualis, & sector GBL æqualis est sectori HEN ; & si circum-
ferentia BL superat circumferentiam EN , superat & GBL
sector sectorem HEN ; & si minor, minor. quatuor igitur
existentibus magnitudinibus, duabus quidem BC EF cir-
cumferentiis, duobus vero sectoribus GBC HFE , sumpta
sunt æque multiplicia circumferentiæ quidem BC & GBC
sectoris, circumferentia BL , & GBL sector. circumferentiæ
vero EF , & sectoris HEF æque multiplicia, circumferentia
 EN , & HEN sector, atque ostensum est si BL circumfere-
ntia superat circumferentiam EN , & sectorem GBL superare
sectorem HEN ; & si æqualis, æqualem esse; & si minor,
minorem.

24. tertii.

minorem, est igitur ut BC circumferentia ad circumferentiam EF , ita sector OBC ad HEF sectorem. Quod ostendere oportebat.

COROLL.

1. Angulus ad centrum est ad quatuor rectos, ut arcus cui insitit ad totam circumferentiam: nam ut angulus BAC ad rectum, ita BC arcus ad circuli quadrantem; quare quadruplicando consequentes, erit angulus BAC ad quatuor rectos, ut arcus BC ad totam circumferentiam.

2. Inæqualium circularum arcus IL BC qui æquales subtendunt angulos, sive ad centra, sive ad peripherias, sunt similes. Nam est IL ad totam peripheriam ILE , ut angulus IAL ad quatuor rectos: est verout IAL seu BAC ad quatuor rectos, ita arcus BC ad totam peripheriam BCF . quare ut IL ad totam peripheriam ILE , ita BC ad totam peripheriam BCF . ac proinde arcus IL BC sunt similes.

3. Duæ semidiametri AB AC à concentricis peripheriis arcus auferunt similes IL BC .



EUCLIDIS ELEMENTORUM.

LIBER UNDECIMUS.

DIFFINITIONES.

I.
Solidum est, quod longitudinem, latitudinem & crassitudinem habet.

II.

Solidi terminus est superficies.

III.

Recta linea ad planum recta est, quando ad omnes rectas lineas quæ ipsam contingunt, & in subjecto sunt plano, rectos angulos efficit.

IV.

Planum ad Planum rectum est, cum rectæ lineæ quæ communi planorum sectioni ad rectos angulos in uno plano ducuntur, alteri plano ad rectos sunt angulos.

V.

Rectæ lineæ ad planum inclinatio est, cum à sublimi termino rectæ illius lineæ ad planum deducta fuerit perpendicularis; atque à puncto quod perpendicularis in ipso plano effecerit, ad propositæ illius lineæ extremum, quod in eodem est plano, altera recta linea fuerit adjuncta; est, inquam, angulus acutus insidente linea, & adjuncta comprehensus.

VI.

VI.

Plani ad planum inclinatio est, angulus acutus rectis lineis contentus, quæ in utroque planorum ad idem communis sectionis punctum ductæ, rectos cum sectione angulo efficiunt.

VII.

Planum ad planum similiter inclinari dicitur, atque alterum ad alterum, cum dicti inclinationum anguli inter se fuerint æquales.

VIII.

Parallela plana sunt, quæ inter se non conveniunt.

IX.

Similes solidæ figuræ sunt, quæ similibus planis continentur, multitudine æqualibus.

X.

Æquales & similes solidæ figuræ sunt, quæ similibus planis multitudine, & magnitudine æqualibus continentur.

XI.

Solidus angulus est, plurium quam duarum linearum quæ se mutuo contingunt, nec in eadem sunt superficie, ad omnes lineas inclinatio. Vel solidus angulus est, qui pluribus quam duobus planis angulis in eodem non consistentibus plano, sed ad unum punctum constitutis continetur.

XII.

Pyramis est figura solida planis comprehensa, quæ ab uno plano ad unum punctum constituuntur.

XIII.

Prisma est figura solida quæ planis continetur, quorum adversa duo sunt & æqualia, & similia, & parallela; alia vero parallelogramma.

XIV.

Sphæra est, quando semicirculi manente diametro, circumductus semicirculus in seipsum rursus revolvitur unde moveri coeperat, circum assumpta figura.

XV.

Axis autem sphaerae est quiescens illa recta linea, circum quam semicirculus convertitur.

XVI.

Centrum sphaerae est idem quod & semicirculi.

XVII.

Diameter autem sphaerae est recta quaedam linea per centrum ducta, & utrinque à sphaerae superficie terminata.

XVIII.

Conus est, quando rectanguli trianguli manente uno latere eorum quae circa rectum angulum, circumductum triangulum in seipsum rursus revolvitur, unde moveri coeperat, circum assumpta figura. Atque si quiescens recta linea aequalis sit reliquae quae circa rectum angulum continetur, orthogonius erit conus: si vero minor, amblygonius: si vero maior, oxygonius.

XIX.

Axis autem conici est quiescens illa linea, circa quam triangulum vertitur.

XX.

Basis vero conici est circulus qui à circumducta recta linea describitur.

XXI.

Cylindrus est, quando rectanguli parallelogrammi manente uno latere eorum quae circa rectum angulum, circumductum parallelogrammum in seipsum rursus revolvitur; unde coeperat moveri, circum assumpta figura.

XXII.

Axis autem cylindri est quiescens illa recta linea, circum quam parallelogrammum convertitur.

XXIII.

Bases vero cylindri sunt circuli à duobus adversis lateribus, quae circumaguntur, descripti.

XXIV.

Similes conici & cylindri sunt, quorum & axes, & basium diametri proportionales sunt.

XXV.

XXV.

Cubus est figura solida sub sex quadratis æqualibus contenta.

XXVI.

Tetraedrum est figura solida sub quatuor triangulis æqualibus & æquilateris contenta.

XXVII.

Octaedrum est figura solida sub octo triangulis æqualibus & æquilateris contenta.

XXVIII.

Dodecaedrum est figura solida sub duodecim pentagonis æqualibus, & æquilateris, & æquiangulis contenta.

XXIX.

Icosaedrum est figura solida sub viginti triangulis æqualibus, & æquilateris contenta.

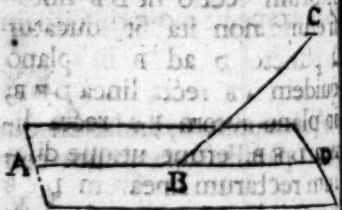
XXX.

Parallelepipedum est figura solida sex figuris quadrilateris quarum quæ ex aduerso parallelæ sunt, contenta.

PROPOSITIO I. THEOREMA.

Recta linea pars quædam non est in subiecto plano, quædam vero in sublimi.

Si enim fieri potest, rectæ lineæ AB pars quidem AB sit in subiecto plano, pars vero BC in sublimi erit recta linea quædam ipsi AB in directum continuata in subiecto plano. sitque DB duabus igitur datis rectis lineis ABC ABD commune segmentum est AB , quod fieri non potest: recta enim linea cum recta linea non convenit in pluribus punctis, quam uno. Non igitur rectæ lineæ pars quædam est in subiecto plano, quædam vero in sublimi. Quod demonstrare oportebat.

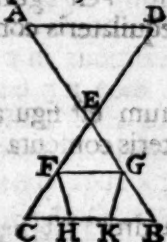


PROP.

PROP. II. THEOR.

Si duæ rectæ lineæ se invicem secant, in uno sunt plano, & omne triangulum in uno plano consistit.

Duæ enim rectæ lineæ AB & CD se invicem in puncto E secant, dico ipsas AB & CD in uno esse plano, & omne trian-



gulum in uno plano consistere. Sumantur enim in ipsis EB & EC quævis puncta F & G ; junganturque FG , & FH & GH ducantur. dico primum EBC triangulum consistere in uno plano. si enim trian-

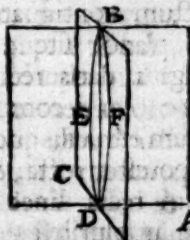
guli EBC pars quædam FHC , vel GBK in subiecto plano est, reliqua vero in alio plano; erit & linearum EB & EC pars in subiecto plano, & pars in alio. quod si trianguli ECB pars $FCBG$ sit in subiecto plano, reliqua vero in alio, utrarumque rectarum linearum EC & EB quædam pars erit in subiecto plano, quædam vero in alio. quod absurdum esse ostendimus. triangulum igitur EBC in uno est plano. in quo autem plano est EBC triangulum, in hoc est utraque ipsarum EC & EB : in quo autem utraque ipsarum EC & EB , in hoc & AB & CD . Ergo rectæ lineæ AB & CD in uno sunt plano, & omne triangulum in uno plano consistit. Quod erat demonstrandum.

PROP. III. THEOR.

Si duo plana se invicem secant, communis ipsorum sectio recta linea erit.

Duo plana AB & BC se invicem secant, communis autem ipsorum sectio sit DB linea. dico lineam DB rectam esse.

si enim non ita sit, ducatur à puncto D ad B in plano quidem AB recta linea DEB ; in plano autem BC recta linea DFB . erunt utique duarum rectarum linearum DEB & DFB iidem termini, & ipsæ spatium continebunt, quod

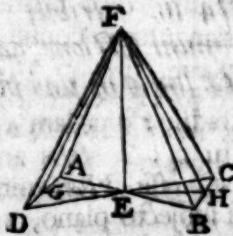


est absurdum. non igitur DEB & DFB rectæ lineæ sunt. si- Axiom. 1.
militer ostendemus neque aliam quampiam, quæ à puncto D ad B ducitur rectam esse, præter ipsam DB : communem scilicet planorum AB & BC sectionem. Si igitur duo plana se invicem secant, communis ipsorum sectio recta linea erit. PROP.

PROP. IV. THEOR.

Si recta linea duabus rectis lineis se invicem secantibus in communi sectione ad rectos angulos insistat, etiam ducto per ipsas plano ad rectos angulos erit.

Recta linea quædam EF duabus rectis lineis AB CD se invicem secantibus in E puncto, ab ipso E ad rectos angulos insistat. dico EF etiam plano per AB CD ducto ad rectos angulos esse. Sumantur rectæ lineæ AE EB GE DE inter se æquales: perque E ducatur recta linea GEH utcunque & jungantur AD CB; deinde à quovis puncto F ducantur FA FG FD FC FH FB. & quoniam duæ rectæ lineæ AE ED duabus rectis lineis CE EB æquales sunt, &



- a 15. primi. angulos æquales AED CEB continent, erit Δ AD basis basi
 b 4. primi. CB æqualis, & triangulum AED triangulo CEB æquale.
 ergo & angulus DAE æqualis est angulo ECB. est autem,
 & angulus AEG æqualis angulo BEH. duo igitur triangu-
 la sunt AGE BEH, duos angulos duobus angulis æquales ha-
 bentia, alterum alteri, & unum latus AE uni lateri EB æ-
 quale quod est ad æquales angulos. quare & reliqua latera
 c 26. primi. reliquis lateribus æqualia habebunt. ergo GE quidem est
 æqualis EH; AG vero ipsi BH. quod cum AE sit æqualis
 EB, communis autem, & ad rectos angulos FE; erit Δ basi
 AF basi FB æqualis; eadem quoque ratione & CF æqualis
 erit FD. præterea quoniam AD est æqualis CB, & AF ipsi
 FB, erunt duæ FA AD duabus FB BC æquales, altera al-
 teri; & ostensa est basis DF æqualis basi FC. angulus igitur
 d 8. primi. FAD angulo FBC est æqualis. rursus ostensa est AG æ-
 qualis BH; sed & AF ipsi FB est æqualis. duæ igitur FA AG
 duabus FB BH æquales sunt, & angulus FAG æqualis est
 angulo FBH; ut demonstratum fuit, basis igitur GF basi FH
 est æqualis. rursus quoniam GE ostensa est æqualis EH,
 communis autem EF; erunt duæ GE EF æquales duabus
 HE EF; & basis HF est æqualis basi FG. angulus igitur
 GEF angulo HEF est æqualis, & idcirco rectus est uterque
 angulorum GEF HEF. ergo FE ad GH utcunque per E du-
 ctam rectos efficit angulos. similiter ostendemus FE etiam
 ad omnes rectas lineas, quæ ipsum contingunt, & in sub-
 jecto sunt plano, rectos angulos efficere. recta autem ad
 e 3. Defin. planum recta est quando ad omnes rectas lineas ipsam con-
 tingentes,

tingentes, & in eodem existentes plano rectos efficit angulos. quare FE subjecto plano ad rectos angulos insistit. at subjectum planum est quod per AB CD rectas lineas ductum. ergo FE ad rectos angulos erit ducto per AB CD plano. Si igitur recta linea duabus rectis lineis se invicem secantibus in communi sectione ad rectos angulos insistat, etiam ducto per ipsas plano ad rectos angulos erit. Quod demonstrare oportebat.

PROP. V. THEOR.

Si recta linea tribus rectis lineis sese tangentibus, in communi sectione, ad rectos angulos insistat, tres illæ rectæ lineæ in uno plano erunt.

Recta linea quædam AB tribus rectis lineis BC BD BE, in contactu B, ad rectos angulos insistat. dico BC BD BE in uno plano esse. Non enim, sed si fieri potest, sint B C B E quidem in subjecto plano, BC vero in sublimi, & planum per

AB BC producat. communem utique sectionem in subjecto plano faciet a rectam lineam; faciat BF. in uno igitur sunt plano per AB BC ducto, tres rectæ lineæ AB BC BE. & quoniam AB utrique ipsarum BD BE ad rectos angulos insistit, & ducto per ipsas DB BE plano ad rectos angulos erit. planum autem per DB BE est subjectum planum, ergo AB ad subjectum planum recta est. quare & ad omnes rectas lineas ipsam contingentes, quæ in eodem plano sunt, rectos faciet angulos; sed ipsam tangit BF in subjecto existens plano. ergo angulus ABF rectus est. ponitur autem & AEC angulus rectus æqualis igitur est angulus ABE angulo ABC. & in eodem sunt plano; quod fieri non potest. recta igitur linea BC non est in sublimi; quare tres rectæ lineæ BC BD BE in uno sunt plano. Si igitur recta linea tribus rectis lineis sese tangentibus, in communi sectione, ad rectos angulos insistat, tres illæ rectæ lineæ in uno plano erunt. Quod demonstrare oportebat.

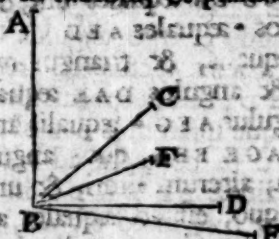
PROP. VI. THEOR.

Si duæ rectæ lineæ eidem plano ad rectos angulos fuerint, illæ inter sese parallele erunt.

Duæ enim rectæ lineæ AB CD subjecto plano sint ad rectos angulos. dico AB ipsi CD parallelam esse. occurrant

L

enim



a 3. hujus.

b 4. hujus.

c 3. Diffin.

- enim subiecto plano in punctis B D, jungaturque BD, recta linea, cui ad rectos angulos in subiecto plano ducatur DE, & posita DE ipsi AB æquali, jungantur BE, AE AD. Quoniam igitur AB recta est ad subiectum planum, & ad omnes rectas lineas quæ ipsam contingunt, & in subiecto sunt plano, rectos angulos efficiet. contingit autem AB utraque ipsarum BD BE existens in subiecto plano. ergo uterque angulorum ABD ABE rectus est. eadem ratione rectus etiam est uterque ipsorum CDB CDE. & quoniam AB æqualis est ipsi DE, communis autem BD. erunt duæ AB BD duabus ED DB æquales, & rectos angulos continent; basis igitur AD basi BE est æqualis. rursus quoniam AB est æqualis DE, & AD ipsi BE, duæ AB BE duabus ED DA æquales sunt, & basis ipsarum AE communis; ergo angulus ABE angulo EDA est æqualis. sed ABE rectus est. rectus igitur & EDA; & idcirco ED ad DA est perpendicularis. sed & perpendicularis est ad utramque ipsarum BD DC. quare ED tribus rectis lineis BP DA DC in contactu ad rectos insistit angulos. tres igitur rectæ lineæ BD DA DC in uno sunt plano. in quo autem sunt BD DA, in eo est AB, omne enim triangulum in uno est plano. ergo AB BD DC in uno plano sint necesse est: atque est uterque angulorum ABD BDC rectus. parallela igitur est AB ipsi CD. quare si duæ rectæ lineæ eidem plano ad rectos angulos fuerint, illæ inter se parallelæ erunt. Q. E. D.



PROP. VII. THEOR.

Si duæ rectæ lineæ parallelæ sint, sumantur autem in utraque ipsarum quælibet puncta; quæ dicta puncta coniungit recta in eodem erit plano, in quo & parallelæ.

Sint duæ rectæ lineæ parallelæ AB CD, & in utraque ipsarum sumantur quælibet puncta E F. dico rectam lineam quæ puncta E F coniungit, in eodem plano esse, in quo sunt parallelæ. non enim, sed si heri potest, sit in sublimi, ut EGF, & per EGF, planum ducatur quod



3. hujus. in subiecto plano sectionem faciet rectam lineam; faciat ut

ut E F. ergo duæ rectæ lineæ E G F E F spatium contine-
bunt, quod fieri non potest. non igitur quæ à puncto E ad
F ducitur recta linea in sublimi est plano, quare erit in eo
quod per A B C D parallelas transit. Si igitur duæ rectæ li-
neæ parallelæ sint, &c. Quod oportebat demonstrare.

PROP. VIII. THEOR.

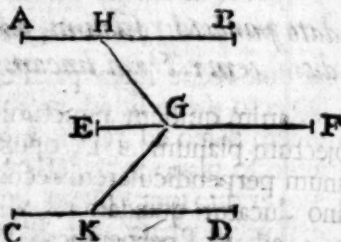
*Si duæ rectæ lineæ parallelæ sint, altera autem ipsa-
rum plano alicui sit ad rectos angulos, & reliqua ei-
dem plano ad rectos angulos erit.*

Sint duæ rectæ lineæ parallelæ A B C D, & altera ipsarum
A B subjecto plano sit ad rectos angulos. dico & reliquam
C D eidem plano ad rectos angulos esse. occurrant enim A B
C D subjecto plano in punctis B D, & B D jungatur. ergo A B
C D B D in uno sunt plano. ducatur ipsi B D ad rectos angu-
los in subjecto plano D E: & ponatur D E ipsi A B æqualis:
junganturque B E A E A D. & quoniam A B perpendicularis
est ad subjectum planum, & ad omnes rectas lineas quæ
ipsam contingunt suntque in subjecto plano, perpendicu-
laris erit. rectus igitur est uterque angulorum A B D A B E.
quod cum in parallelas rectas lineas A B C D recta incidit
B D, erunt anguli A B D C D B duobus rectis æquales. rectus
autem est A B D. ergo & C D B est rectus; ac propterea C D
perpendicularis est ad B D. & quoniam A B est æqualis D E,
communis autem B D, duæ A B B D duabus E D D B æquales
sunt; & angulus A B D est æqualis angulo E D B, rectus enim
uterque est, basis igitur A D basi B E est æqualis. rursus
quoniam A B æqualis est D E, & B E ipsi A D; erunt duæ
A B B E duabus E D D A æquales, altera alteri; & basis ea-
rum communis A E. quare angulus A B E est æqualis angulo
E D A. rectus autem est A B E. ergo & E D A est rectus, & E D
ad D A perpendicularis. sed & perpendicularis est ad B D.
ergo E D etiam ad planum per B D D A perpendicularis erit.
& ad omnes rectas lineas quæ in eodem existentes plano
ipsam contingunt, rectos faciet angulos. at in plano per
B A A D est D E, quoniam in plano per B D D A sunt & A B
B D: in quo autem sunt A B B D in eodem; est ipsa D C. quare
E D ipsi D C est ad rectos angulos: ideoque C D ad rectos
angulos est ipsi D E; sed & etiam ipsi D B. ergo C D duabus
rectis lineis D E D B se mutuo secantibus in communi secti-
one D ad rectos angulos insistit; ac propterea plano per D E
D B est ad rectos angulos. planum autem per D E D B est
subjectum planum. ergo C D subjecto plano ad rectos angu-
los erit. Quod demonstrare oportebat.

PROP. IX. THEOR.

Quæ eadem rectæ lineæ sunt parallelæ, non existentes in eodem in quo ipsa plano, etiam inter se parallelæ erunt.

Sit utraque ipsarum AB CD parallelæ ipsi EF , non existentes in eodem, in quo ipsa plano. dico AB ipsi CD parallelam esse. sumatur in EF quodvis punctum G , à quo ipsi EF , in plano quidem per EF AB transeunte, ad rectos angulos ducatur GH ; in plano autem transeunte per EF CD , rursus ducatur ipsi EF ad rectos angulos GK . & quoniam EF ad utramque ipsarum GH GK est perpendicularis, erit EF etiam ad rectos ^a angulos plano per GH GK transeunte. atque est EF ipsi AB parallelæ. ergo & AB plano per HGK ad rectos angulos ^b est. eadem ratione & CD plano per HGK est ad rectos angulos. utraque igitur ipsarum AB CD plano per HGK ad rectos angulos erit. Si autem duæ rectæ lineæ eodem plano ad rectos angulos fuerint, parallelæ ^c erunt inter se. ergo AB ipsi CD est parallelæ. Quod demonstrare oportebat.



^a 4. hujus.

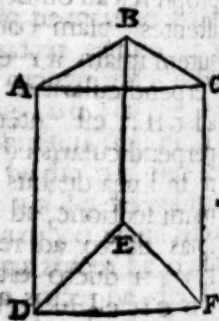
^b 8. hujus.

^c 6. hujus.

PROP. X. THEOR.

Si duæ rectæ lineæ sese contingentes, duabus rectis lineis sese contingentibus sint parallelæ, non autem in eodem plano; æquales angulos continebunt.

Duæ rectæ lineæ sese contingentes AB BC , duabus rectis lineis DE EF sese contingentibus sint parallelæ, non autem in eodem plano. dico angulum ABC angulo DEF æqualem esse. assumantur enim BA BC ED EF inter se æquales: & jungantur AD CF BE AC DF . quoniam igitur BA ipsi ED æqualis est & parallelæ, erit & ^a AD æqualis & parallelæ ipsi BE . eadem ratione & CF ipsi BE æqualis & parallelæ erit. utraque igitur ipsarum AD CF ipsi BE æqualis est & parallelæ. quæ autem eidem rectæ lineæ sunt parallelæ, non existentes in eodem plano; & in-



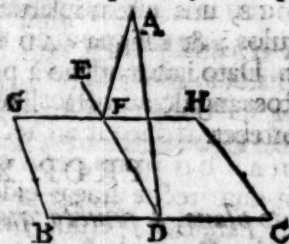
^a 33. primi.

ter se parallelæ erunt. ergo AD parallelæ est ipsi CF & b 9. hujus.
 æqualis. atque ipsas conjungunt AC DF; & AC igitur ipsi
 DF æqualis est & c parallelæ. & quoniam duæ rectæ lineæ AB c 33. primi.
 BC duabus DE EF æquales sunt, & basis AC est æqualis
 basi DF; erit $\angle$ ABC angulo DEF æqualis. Si igitur d 8. primi.
 duæ rectæ lineæ sese contingentes, duabus rectis lineis sese
 contingentibus sint parallelæ, non autem in eodem plano;
 æquales angulos continebunt. Quod oportebat demonstrare.

PROP. XI. PROBL.

A dato puncto in sublimi, ad subjectum planum, perpendicularem rectam lineam ducere.

Sit datum quidem punctum in sublimi A, datum autem
 subjectum planum BH. oportet à puncto A ad subjectum
 planum perpendicularem rectam lineam ducere. In subjecto
 plano ducatur quædam recta linea utcunque BC; & à pun-
 cto A ad BC perpendicularis agatur AD. siquidem
 igitur AD perpendicularis
 sit etiam ad subjectum pla-
 num; factum jam erit, quod
 proponebatur: sin minus;
 ducatur à puncto D ipsi BC,
 in subjecto plano, ad rectos



angulos DE: & à puncto A ad DE perpendicularis du- b 11. primi.
 catur AF. denique per F ducatur GH ipsi BC parallelæ. c 12. primi.
 Quoniam BC utrique ipsarum DA DE est ad rectos angulos,
 erit $\angle$ & BC ad rectos angulos plano per ED DA transeunti. d 4. hujus.
 quin ipsi BC parallelæ est GH; si autem sint duæ rectæ lineæ
 parallelæ, quarum una plano alicui sit ad rectos angulos;
 & reliquæ eidem plano ad rectos angulos erit. quare & e 8. hujus.
 GH plano per ED DA transeuntis ad rectos angulos est: ac
 propterea ad omnes rectas lineas, quæ in eodem plano ex-
 istentes ipsam contingunt, est perpendicularis. contingit
 autem ipsam AF existens in plano per ED DA. ergo GH f 3. Diffin.
 perpendicularis est ad AF. & ob id AF est perpendicularis
 ad GH: est autem AF ad DE perpendicularis. ergo AF
 perpendicularis est ad utramque ipsarum HG DE. si autem
 recta linea duabus rectis lineis sese contingentibus, in com-
 muni sectione, ad rectos angulos insitat, etiam plano per
 ipsas ducto ad rectos angulos erit. quare AF plano per
 ED GH ducto est ad rectos angulos. planum autem per
 ED GH est subjectum planum. ergo AF ad subjectum pla-
 num est perpendicularis. A dato igitur puncto sublimi A, ad

subjectum planum, perpendicularis recta linea ducta est AF. Quod facere oportebat.

PROP. XII. PROBL.

Dato plano, à puncto quod in ipso datum est, ad rectos angulos rectam lineam constituere.

Sit datum quidem planum subjectum, punctum autem quod in ipso sit A. oportet à puncto A subjecto plano ad rectos angulos rectam lineam constituere. Intelligatur aliquod punctum sublime B, à quo ad subjectum planum agatur perpendicularis BE; & per A ipsi BE parallela ducatur AD. quoniam igitur duæ rectæ lineæ parallelæ sunt AD BE, una autem ipsarum BE subjecto plano est ad rectos angulos; & reliqua AD subjecto plano ad rectos angulos erit. Dato igitur plano à puncto quod in ipso est datum, ad rectos angulos recta linea constituta est. Quod facere oportebat.



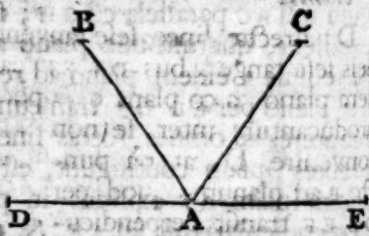
a 11. huius
b 31. primi.

c 8. huius.

PROP. XIII. THEOR.

Dato plano, à puncto quod in ipso est, duæ rectæ lineæ ad rectos angulos non constituentur ex eadem parte.

Si enim fieri potest, dato plano, à puncto quod in ipso est A, duæ rectæ lineæ AB AC ad rectos angulos constituentur ex eadem parte: & ducatur planum per BA AC, quod faciet sectionem per A in subjecto plano rectam lineam. faciat DAE. ergo rectæ lineæ AB AC DAE in uno sunt plano. & quoniam CA subjecto plano ad rectos angulos est, & ad omnes rectas lineas, quæ in subjecto plano existentes ipsam contingunt, rectos faciet angulos. contingit autem ipsam DAE, quæ est in subjecto plano, angulus igitur CAE rectus est. eadem ratione & rectus est BAE. ergo angulus CAE ipsi BAE est æqualis, & in uno sunt plano, quod fieri non potest. Non igitur dato plano, à puncto, quod in ipso est, duæ rectæ lineæ ad rectos angulos constituentur ex eadem parte. Quod oportebat demonstrare.



a 3. huius.

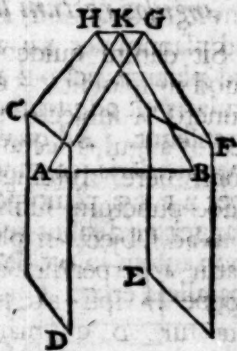
g 3. Diffin.

PROP.

PROP. XIV. THEOR.

Ad quæ plana, eadem recta linea est perpendicularis, ea parallela sunt.

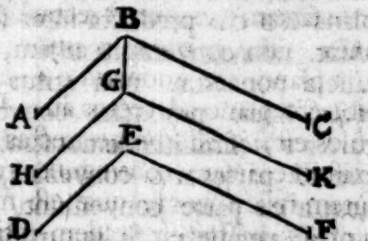
Recta quædam linea AB ad utrumque ipsorum planorum CD EF sit perpendicularis. dico ea plana parallela esse. Si enim non ita sit, producta convenient inter se: convenient, & communem sectionem faciant rectam lineam GH ; & in ipsa GH sumpto quovis puncto K , jungatur AK BK . Quoniam igitur AB perpendicularis est ad EF planum; erit & perpendicularis ad ipsam BK rectam lineam in plano EF producto existentem. quare angulus ABK rectus est. eadem ratione & BAK est rectus: ideoque trianguli ABK duo anguli ABK BAK duobus rectis sunt æquales, quod fieri non potest. non igitur plana CD EF producta inter se convenient. quare CD EF parallela sunt necesse est. Ad quæ igitur plana, eadem recta linea est perpendicularis, ea parallela sunt. Quod demonstrare oportebat.



PROP. XV. THEOR.

Si duæ rectæ lineæ sese tangentes duabus rectis lineis sese tangentibus sint parallelae, non autem in eodem plano; & quæ per ipsas transeunt plana parallela erunt.

Duæ rectæ lineæ sese tangentes AB BC , duabus rectis lineis sese tangentibus DE EF parallelae sint, & non in eodem plano. dico plana quæ per AB BC , DE EF transeunt, si producantur, inter se non convenire. Ducatur à puncto B ad planum, quod per DE EF transit perpendicularis BG , quæ plano in puncto G occurrat, & per G ducatur ipsi quidem ED parallela GH ; ipsi vero EF parallela GK . itaque quoniam BG perpendicularis est ad planum per DE EF ; & ad omnes rectas lineas quæ ipsam contingunt, & in eodem sunt plano, rectos faciet æquales angulos, contingit autem ipsam utraque earum GH GK , quæ sunt in eodem

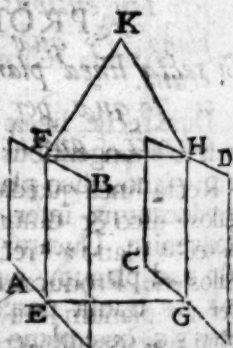


eodem plano. rectus igitur est uterque angulorum BGH
 BGK. & quoniam BA parallela est ipsi GH, anguli GBA
 19 primi. BGH duobus rectis sunt æquales. rectus autem est BGH.
 ergo & GBA rectus erit, ideoque GB ad BA est perpendi-
 cularis. eadem ratione & GB est perpendicularis ad BC.
 cum igitur recta linea BG duabus rectis lineis BA BC se
 invicem secantibus ad rectos angulos insit; erit BG etiam
 4. hujus. ad planum per BA BC ductum perpendicularis. atque est
 ad planum per DE EF perpendicularis. ergo BG perpendi-
 cularis est ad utrumque planorum quæ per AB BC, DE EF
 transeunt. Ad quæ vero plana eadem recta linea est per-
 14. hujus. pendicularis, ea parallela sunt. parallelum igitur est planum
 per AB BC plano per DE EF. Quare si duæ rectæ lineæ sese
 tangentes duabus rectis lineis sese tangentibus sint parallelae,
 non autem in eodem plano, & quæ per ipsas transeunt plana
 parallela erunt. Quod demonstrare oportebat.

PROP. XVI. THEOR.

*Si duo plana parallela ab aliquo plano secantur, commu-
 nes ipsorum sectiones parallelae erunt.*

Duo plana parallela AB CD à plano aliquo EFHG se-
 centur; communes autem ipsorum sectiones sint EF GH.
 dico EF ipsi GH parallelam esse. Si enim non est parallela,
 productæ EF GH inter se convenient, vel ad partes FH,
 vel ad partes EG. producantur prius,
 ut ad FH, & convenient in K. quoniam
 igitur EFK est in plano AB, & omnia
 quæ in EFK sumuntur puncta in eo-
 dem plano erunt: unum autem puncto-
 rum quæ sunt in EFK, est ipsum K
 punctum. ergo K est in plano AB. ea-
 dem ratione & K est in CD plano. ergo
 plana AB CD producta inter se conve-
 nient. non conveniunt autem, cum pa-
 rallela ponantur. non igitur EF GH
 rectæ lineæ productæ convenient ad
 partes FH. similiter demonstrabimus ne-
 que ad partes EG convenire, si producantur. quæ autem
 neutra ex parte conveniunt parallelae sunt. ergo EF ipsi
 GH est parallela. Si igitur duo plana parallela ab aliquo
 plano secantur, communes ipsorum sectiones parallelae erunt.
 Quod demonstrare oportebat.

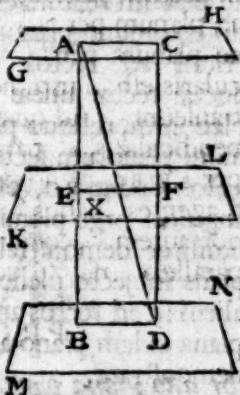


PROP.

PROP. XVII. THEOR.

Si duæ rectæ lineæ à parallelis secantur planis, in easdem proportionibus secabuntur.

Duæ rectæ lineæ $ABCD$ à parallelis planis $GHLMN$ secantur in punctis AEB CFD . dico ut AE recta linea ad ipsam EB , ita esse CF ad FD . Jungantur enim AC BD AD ; & occurrat AD plano KLM in puncto X ; & EX XF jungantur. Quoniam igitur duo plana parallela $KLMN$ à plano $EBDX$ secantur, communes ipsorum sectiones EX BD parallelae sunt. eadem ratione quoniam duo plana parallela $GHLK$ à plano $AXFC$ secantur, communes ipsorum sectiones AC FX sunt parallelae. & quoniam unilaterum trianguli ABD , videlicet ipsi BD parallela ducta est EX , ut AE ad EB , ita erit AX ad XD . rursus quoniam unilaterum trianguli ADC , nempe ipsi AC parallela ducta est XF , erit ut AX ad XD , ita CF ad FD . ostensum autem est ut AX ad XD , ita esse AE ad EB . ut igitur AE ad EB , ita est CF ad FD . Quare si duæ rectæ lineæ à parallelis secantur planis, in easdem proportionibus secabuntur. Quod demonstrare oportebat.

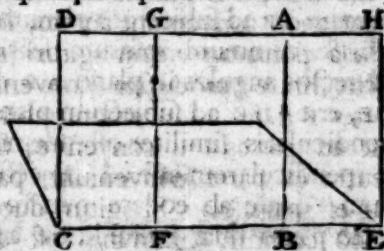


16. hujus.

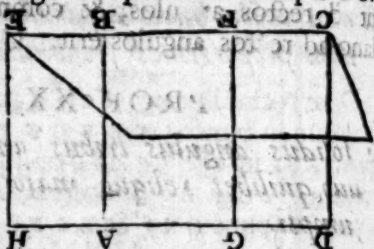
PROP. XVIII. THEOR.

Si recta linea plano alicui sit ad rectos angulos, & omnia quæ per ipsam transeunt plana eidem plano ad rectos angulos erunt.

Recta linea quædam AB subjecto plano sit ad rectos angulos. dico & omnia plana quæ per ipsam AB transeunt, subjecto plano ad rectos angulos esse. Producatur enim per AB planum DE , sitque plani DE , & subjecti plani communis sectio CE ; & sumatur in CE quodvis punctum F ; à quo ipsi CE ad rectos angulos, in DE plano, ducatur FG . quoniam igitur AB ad subjectum planum est perpendicularis; & ad omnes rectas lineas, quæ ipsam contingunt & in eodem sunt plano perpendicularis erit. quare etiam



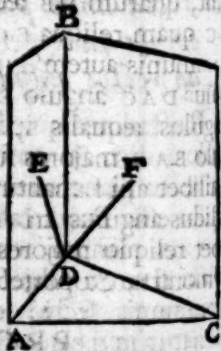
etiam ad CE est perpendicularis. angulus igitur ABP rectus est: sed & GFB est rectus. ergo AB parallela est ipsi FG . est autem AB subjecto plano ad rectos angulos. & FG igitur eidem plano ad rectos angulos ϵ erit. at planum ad planum rectum est, quando communi planorum sectioni ad rectos angulos ductæ rectæ lineæ in uno planorum, reliquo plano ad rectos angulos ϵ sint: at communi planorum sectioni CE in uno plano DE ad rectos angulos ducta FG , ostensa est subjecto plano ad rectos esse angulos. ergo planum DE rectum est ad subjectum planum. similiter demonstrabuntur & omnia quæ per AB transeunt plana subjecto plano recta esse. Si igitur recta linea plano alicui sit ad rectos angulos, & omnia quæ per ipsam transeunt plana eidem plano ad rectos angulos erunt. Quod oportebat demonstrare.



PROP. XIX. THEOR.

Si duo plana se invicem secantia plano alicui sint ad rectos angulos, & communis ipsorum sectio eidem plano ad rectos angulos erit.

Duo plana se invicem secantia AB BC subjecto plano sint ad rectos angulos: communis autem ipsorum sectio sit BD . dico BD subjecto plano ad rectos angulos esse. Non enim, sed si fieri potest; non sit BD ad rectos angulos subjecto plano: & a puncto D ducatur in plano quidem AB , ipsi AD rectæ lineæ ad rectos angulos DE : in plano autem BC ducatur ipsi CD ad rectos angulos DF . Et quoniam planum AB ad subjectum planum rectum est, & communi ipsorum sectioni AD ad rectos angulos in plano AB ducta est DE , erit DE ad subjectum planum perpendicularis. similiter ostendemus & DF perpendicularem esse ad subjectum planum. quare ab eodem puncto D subjecto plano duæ rectæ lineæ ad rectos angulos constitutæ sunt ex eadem parte, quod fieri non potest. non igitur subjecto plano a puncto D ad rectos angulos constituentur aliæ rectæ lineæ, præter ipsam DB , communem planorum



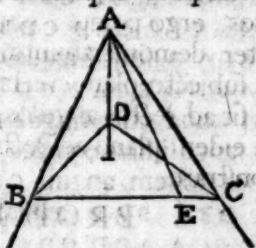
AB BC

AB BC sectionem. quare DB subjecto plano est perpendicularis. Ergo si duo plana se invicem secantia plano alicui sint ad rectos angulos, & communis ipsorum sectio eidem plano ad rectos angulos erit. Quod oportebat demonstrare.

PROP. XX. THEOR.

Si solidus angulus tribus angulis planis contineatur, duo quilibet reliquo majores sunt, quomodocunque sumpti.

Solidus angulus ad A tribus angulis planis BAC CAD DAB contineatur. dico angulorum BAC CAD DAB duos quolibet reliquo majores esse, quomodocunque sumptos. Si enim BAC CAD DAB anguli inter se æquales sint, perspicuum est duos quolibet reliquo majores esse, quomodocunque sumptos. sin minus, sit major BAC. & ad rectam lineam AB, & ad punctum in ipsa A, constitutur angulo DAB, in plano per BA AC transeunte, æqualis angulus BAE; ponaturque ipsi AD æqualis AE; & per E ducta BEC secet rectas lineas AB AC in punctis B, C, & DB DC jungantur. itaque quoniam DA est æqualis AE, communis autem AB, duæ DA AB æquales sunt duabus AE AB; & angulus DAB æqualis est angulo BAE. basis igitur DB basi BE est æqualis. & quoniam duæ DB DC ipsa BC majores sunt, quarum DB æqualis ostensa est ipsi BE; erit reliqua DC quam reliqua EC major. quod cum DA sit æqualis AE, communis autem AC & basis DC major basi EC; erit angulus DAC angulo EAC major sed ex constructione est DAB angulus æqualis ipsi BAE. quare DAB DAC anguli, angulo BAC majores sunt. similiter demonstrabimus, & si duo quilibet alii sumantur, eos reliquo esse majores. Si igitur solidus angulus tribus angulis planis contineatur; duo quilibet reliquo majores sunt, quomodocunque sumpti. Quod demonstrare oportebat.



PROP. XXI. THEOR.

Omnis solidus angulus, minoribus quam quatuor rectis angulis planis continetur.

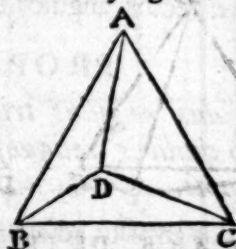
Sit solidus angulus ad A, planis angulis BAC CAD DAB

con-

contentus. dico angulos BAC CAD DAB quatuor rectis esse minores. Sumantur enim in unaquaque ipsarum AB AC AD quævis puncta $B'CD'$, & BC CD' DB' jungantur. Quo-

420 hujus.

niam igitur solidus angulus ad B , tribus angulis planis continetur CBA ABD CBD , duo quilibet reliquo majores sunt. anguli igitur CBA ABD , angulo CBD sunt majores. eadem ratione, & anguli quidem BCA ACD , majores sunt angulo BCD ; anguli vero CDA ADB majores angulo CDB .



632 primi.

quare sex anguli CBA ABD BCA ACD ADC ADB tribus angulis CBD BCD CDB sunt majores. sed tres anguli CBD BDC DCB sunt b æquales duobus rectis. sex igitur anguli CBA ABD BCA ACD ADC ADB duobus rectis majores sunt. quod cum singulorum triangulorum ABC ACD ADB tres anguli sint æquales duobus rectis, erunt trium triangulorum novem anguli CBA ACB BAC ACD DAC CDA ADB DBA BAD æquales sex rectis. quorum sex anguli ABC BCA ACD CDA ADB DBA duobus rectis sunt majores. reliqui igitur BAC CAD DAB tres anguli, qui solidum continent angulum, quatuor rectis minores erunt. Quare omnis solidus angulus, minoribus quam quatuor rectis angulis planis continetur. Quod oportebat demonstrare.

PROP. XXII. THEOR.

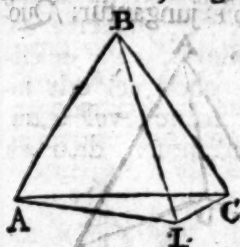
Si sint tres anguli plani, quorum duo reliquo sint majores, quomodocunque sumpti, contineant autem ipsos rectæ lineæ æquales fieri potest, ut ex iis quæ rectas æquales conjungunt, triangulum constituatur.

44 primi.

Sint dati tres anguli plani ABC DEF GHK , quorum duo reliquo sint majores, quomodocunque sumpti: contineant autem ipsos æquales rectæ lineæ AB BC DE EF GH HK , & AC DF GK jungantur. dico fieri posse ut ex æqualibus ipsis AC DF GK triangulum constituatur: hoc est duas reliqua majores esse quomodocunque sumptas. Si igitur anguli ad B E H sint æquales, & AC DF GK æquales a erunt, & duæ reliquæ majores. sin minus, sint inæquales anguli ad B E H , & major sit angulus ad B utrovis ipsorum qui sunt ad E H . major igitur est & b recta linea AC utrovis ipsarum DF GK . & manifestum est ipsam AC unā cum altera ipsarum DF GK , reliqua esse majorem. dico & DF GK ipsa AC majores

614 primi

maiores esse. constituatur ad rectam lineam AB, & ad punctum in ea B, angulo GHK æqualis angulus ABL, & uni

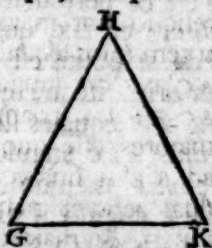


ipsarum AB BC DE EF GH HK ponatur æqualis BL, & AL CL jungantur. Quoniam igitur duæ AB BL duabus GH HK æquales sunt, altera alteri, & angulos æquales continent; erit basis AL basi GK æqualis. & quoniam anguli ad E H, angulo ABC majores sunt, quorum angulus GHK est æqualis ipsi ABL; erit reliquus qui ad E, angulo LBC major. quod cum duæ LB BC duabus DE EF æquales sunt, altera alteri; & angulus DEF angulo LBC major; basis DF basi LC major erit. ostensa est autem GK æqualis AL. b 24 primi. ergo DF GK ipsis AL LC sunt majores; sed AL LC majores sunt ipsa AC. multo igitur DF GK, ipsa AC majores erunt. quare rectarum linearum AC DF GK duæ reliqua majores sunt quomodocunque sumptæ; ac propterea fieri potest ut ex æqualibus ipsis AC DF GK triangulum constituatur. Quod oportebat demonstrare.

PROP. XXIII. PROBL.

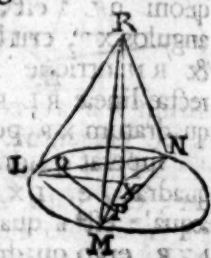
Ex tribus angulis planis, quorum duo reliquo sint majores, quomodocunque sumpti, solidum angulum constituere. oportet autem tres angulos quatuor rectis esse minores.

Sint dati tres anguli plani ABC DEF GHK, quorum duo reliquo sint majores, quomodocunque sumpti, sintque tres



anguli quatuor rectis minores. oportet ex æqualibus ipsis ABC DEF GHK solidum angulum constituere. abscindantur æquales AB BC DE EF GH HK; & AC DF GK jungantur. fieri

- fieri igitur potest ut ex æqualibus ipsis AC DF GK constituatur triangulum. Itaque constituatur LMN , ita ut AC quidem sit æqualis LM , DF vero ipsi MN : & præterea GK ipsi LN , & circa LMN triangulum circulus LMN describatur: sumaturque ipsius centrum X , quod vel erit intra triangulum LMN , vel in uno ejus latere, vel extra. Sit primo intra: & LX MX NX jungantur. dico AB majorem esse ipsa LX . si enim non ita sit, vel AB erit æqualis LX , vel ea minor. sit primo æqualis. quoniam igitur AB est æqualis LX , atque est AB ipsi BC æqualis; erit LX æqualis BC , est autem LX æqualis XM . duæ igitur AB BC duabus LX XM æquales sunt, altera alteri; & AC basis basi LM æqualis ponitur: quare
- 48. primi.** angulus ABC angulo LXM est æqualis: eadem ratione & angulus quidem DEF est æqualis angulo MXN , angulus vero GHK angulo NXL . tres igitur anguli ABC DEF GHK tribus LXM MXN NXL æquales sunt. sed tres LXM MXN NXL quatuor rectis sunt æquales: ergo & tres ABC DEF GHK æquales erunt quatuor rectis. atqui ponuntur quatuor rectis minores, quod est absurdum. non igitur AB ipsi LX est æqualis. dico præterea neque AB minorem esse ipsa LX si enim fieri potest, sit minor, & ponatur ipsi quidem AB æqualis XO , ipsi vero BC æqualis XP , & OP jungatur. quoniam igitur AB est æqualis BC , & XO ipsi XP æqualis erit. ergo & reliqua OL reliquæ PM est æqualis; ac propterea LM parallela est ipsi OP ; & LMX triangulum triangulo OPX æquiangulum. est igitur ut XL ad LM , ita XO ad OP ; & permutando ut LX ad XO , ita LM ad OP . major autem est LX , quam XO . ergo & LM quam OP est major. sed LM posita est æqualis AC . & AC igitur quam OP major erit. itaque quoniam duæ rectæ lineæ AB BC duabus OX XP æquales sunt, & basis AC major basi OP ; erit angulus ABC angulo OPX major. similiter demonstrabimus & DEF angulum majorem esse angulo MXN , & angulum GHK angulo NXL . tres igitur anguli ABC DEF GHK tribus LXM MXN NXL sunt majores. at anguli ABC DEF GHK quatuor rectis minores ponuntur. multo igitur anguli LXM MXN NXL minores erunt quatuor rectis. sed & æquales. quod est absurdum. non igitur AB minor est, quam
- Cor. 15. primi.**
- 22. primi.**
- 5. quarti.**
- 2. sexti.**
- 4. sexti.**
- 25. primi.**
- Cor. 15. primi.**

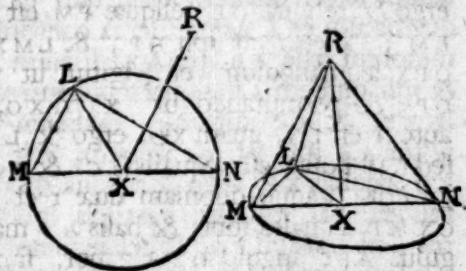


LX. ostensum autem est neque esse æqualem, ergo major sit
 necesse est. constituatur a puncto X circuli LMN plano ad
 rectos angulos XR. & excessui quo quadratum ex AB su-
 perat quadratum ex LX, ponatur æquale quadratum quod
 sit ex RX, & RL RM RN jungantur. quoniam igitur RX
 perpendicularis est ad planum LMN circuli, & ad unam-
 quamque ipsarum LX MX NX erit perpendicularis. & quoniam
 LX est æqualis XM, communis autem & ad rectos
 angulos XR, erit basis LR æqualis basi RM. eadem ratione
 & RN utrique ipsarum RL RM est æqualis. tres igitur
 rectæ lineæ RL RM RN inter se æquales sunt. & quoniam
 quadratum XR ponitur æquale excessui, quo quadratum ex
 AB superat quadratum ex LX; erit quadratum ex AB qua-
 dratis ex LX XR æquale. quadratis autem ex LX XR
 æquale est quadratum ex RL; rectus enim angulus est
 LXR. ergo quadratum ex AB quadrato ex RL æquale erit;
 ideoque AB ipsi RL est æqualis. sed ipsi quidem AB æqua-
 lis est unaquæque ipsarum BC DE EF GH HK: ipsi vero
 RL æqualis utraque ipsarum RM RN. unaquæque igitur
 ipsarum AB BC DE EF GH HK unicuique ipsarum RL RM
 RN est æqualis. quod cum duæ LRM RM duabus AB BC
 æquales sint, & basis LM ponatur æqualis basi AC: erit
 angulus LRM æqualis angulo ABC. eadem ratione & an-
 gulus quidem MRN angulo DEF, angulus autem LRN an-
 gulo GHK est æqualis. ex tribus igitur angulis planis LRM
 MRN LRN, qui æquales sunt tribus datis ABC DEF GHK
 solidus angulus constitutus est ad R.

Sed sit centrum circuli in uno laterum trianguli, vide-
 licet in MN, quod sit X, & XL jungatur. dico rursus AB
 majorem esse ipsa LX.

si enim non ita sit,
 vel AB est æqualis LX
 vel ipsa minor. sit
 primo æqualis. duæ
 igitur AB BC, hoc
 est DE EF duabus MX
 XL, hoc est ipsi MN
 æquales sunt. sed MN
 ponitur æqualis DF.

ergo DE EF ipsi DF sunt æquales. quod fieri non potest
 non igitur AB est æqualis LX. similiter neque minor. multo
 enim magis id quod fieri non potest sequeretur. ergo AB
 ipsa LX major est. & similiter si excessui quo quadratum ex
 AB superat quadratum ex LX æquale ponatur quadratum

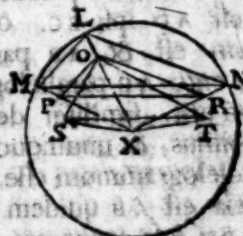
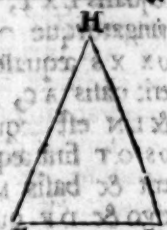


ex

ex RX, & ipsa RX circuli plano ad rectos angulos constituitur, fiet problema.

Sed fit centrum circuli extra triangulum LMN, quod sit X, & LX MX NX jungantur. dico & sic AB ipsa LX maiorem esse. Si enim non ita sit, vel æqualis est, vel minor. sit primo æqualis. ergo duæ AB BC duabus MX XL æquales sunt, altera alteri; & basis AC est æqualis basi ML. angulus igitur ABC æqualis est angulo MXL. eadem ratione & GHK angulus ipsi LXN est æqualis; ac propterea totus MXN æqualis duobus ABC GHK. sed & anguli ABC GHK angulo DEF majores sunt. & angulus igitur MXN ipso DEF est major. at quoniam duæ DE EF duabus MX NX æquales sunt, & basis DF æqualis basi MN, erit MXN angulus angulo DEF æqualis. ostensus autem est major, quod est absurdum.

non igitur AB est æqualis LX: deinceps vero ostendemus neque minorem esse. quare major necessario erit. & si rursus circuli plano ad rectos angulos constituamus XR, & ipsam æqualem ponamus lateri quadrati eius, quo quadratum ex AB superat quadratum ex LX, problema constituetur. dico vero neque minorem esse AB ipsa LX. si enim fieri potest, sit minor; & ipsi quidem AB æqualis ponatur XO, ipsi vero BC æqualis XP, & OP jungatur. quoniam igitur AB ipsi BC est æqualis, erit XO æqualis XP. ergo & reliqua OL reliquæ PM æqualis. parallela igitur est LM ipsi PO, & triangulum LMX triangulo PXO æquiangulum. quare ut XL ad LM, ita XO ad OP. & permutando ut LX ad XO, ita LM ad OP. major autem est LX quam XO. ergo LM quam OP est major. sed LM est æqualis AC. & AC igitur quam OP major erit.



q 2 sexti.

r 4 sexti.

rit.
æqua
sangu
matur
osten
natur
quide
æqua
junga
OX X
erit b
& LN
OS O
erit &
ergo &
EF de
ST; &
est an
anguli
potest

Si sol
pla

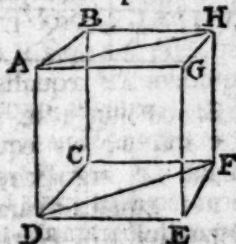
Soli
FB A
& par
lela B
ones
quonia
BF A
commu
paralle
tur est
autem
CD. en
mum e
strabim
paralle
ralla
AB BH
rallae
contine
Et quor

fit. itaque quoniam duæ AB BC duabus OX XP sunt æquales altera alteri; & basis AC major est basi OP; erit *sangulus* ABC angulo OXP major. similiter & si XR su-^{f. 25. primi.} matur æqualis utvis ipsarum XO XP, & jungatur OR, ostendemus angulum GHK angulo OXR majorem. consti-
tuatur ad rectam lineam LX, & punctum in ipsa X angulo quidem ABC æqualis angulus LXS, angulo autem GHK æqualis LXT, & ponatur utraque XS XT ipsi OX æqualis: jungaturque OS OT ST. & quoniam duæ AB BC duabus OX XS æquales sunt, & angulus ABC æqualis angulo OXS, erit basis AC, hoc est LM, basi OS æqualis. eadem ratione, & LN est æqualis ipsi OT. quod cum duæ ML LN duabus OS OT sint æquales, & angulus MLN major angulo SOT; erit & basis MN basi ST major. sed MN est æqualis DF. ergo & DF quam ST major erit. quoniam igitur duæ DE EF duabus SX XT æquales sunt, & basis DF major basi ST; erit angulus DEF angulo SXT major. æqualis autem est angulus SXT angulis ABC GHK. ergo DEF angulus angulis ABC GHK major est: sed & minor. Quod fieri non potest. Quod demonstrare oportebat.

PROP. XXIV. THEOR.

Si solidum parallelis planis contineatur, opposita ipsius plana, & æqualia, & parallelogramma erunt.

Solidum enim CDGH parallelis planis ACGF BG CE FB AE contineatur. dico opposita ejus plana, & æqualia, & parallelogramma esse. Quoniam enim duo plana parallela BG CE, à plano AC secantur, communes ipsorum sectiones parallelæ sunt: ergo AB ipsi CD est parallela. rursus quoniam duo plana parallela BF AE secantur à plano AC, communes ipsorum sectiones parallelæ sunt: parallela igitur est AD ipsi BC. ostensa autem est & AB parallela CD. ergo AC parallelogrammum erit. similiter demon-



16 hujus.

strabimus, & unumquodque ipsorum CE FG GB BF AE parallelogrammum esse. jungantur AH DF. & quoniam parallela est AB quidem ipsi DC; BH vero ipsi CF, erunt AB BH sese tangentes, duabus DC CF sese tangentibus parallelæ, & non in eodem plano: quare æquales ^{10 hujus.} angulos continebunt. angulus igitur ABH angulo DCF est æqualis. Et quoniam duæ AB BH duabus DC CF æquales ^{34. primi.} sunt, & angulus

M

d. 4. primi. angulus ABH æqualis angulo DCF , erit d basis AH basi DF æqualis: & ABH triangulum æquale triangulo DCF , quod
e. 41. primi. cum ipsius quidem ABH trianguli, duplum sit BG parallelogrammum: ipsius vero DCF trianguli, duplum parallelogrammum CE : erit BG parallelogrammum æquale parallelogrammo CE . similiter demonstrabimus & AC parallelogrammum parallelogrammo GF , & parallelogrammum AE parallelogrammo BF æquale esse. Si igitur solidum parallelis planis contineatur, opposita ipsius plana, & æqualia, & parallelogramma sunt. Quod oportebat demonstrare.

Cor. Ex jam demonstratis constat, si solidum parallelis contineatur planis, opposita ipsius plana, & æqualia esse, & similia, quippe quæ & singulos angulos æquales, & circa æquales angulos latera proportionalia habeant.

PROP. XXV. THEOR.

Si solidum parallelepipedum plano secetur oppositis planis parallelo, erit ut basis ad basim, ita solidum ad solidum.

Solidum enim parallelepipedum $ABCD$ plano YE secetur, oppositis planis RA DH parallelo. dico ut EF Φ A basis ad basim $EHCF$, ita esse $ABFY$ solidum ad solidum $EGCD$. Producatur enim AH ex utraque parte, & ponantur ipsi



a. 1. sexti.

b. 24. huius.

quidem EH æquales quocunque HM MN ; ipsi vero AE æquales quocunque AK KL , & compleantur parallelogramma LO $K\Phi$ HX MS , & solida LP KR $H\Omega$ MT . quoniam igitur æquales inter se sunt LK KA AE rectæ lineæ; erunt & parallelogramma LO $K\Phi$ AF inter se æqualia: itemque æqualia inter se parallelogramma $K\Xi$ KB AG , & adhuc parallelogramma $L\Upsilon$ KP AR inter se æqualia; opposita enim sunt. eadem ratione & parallelogramma EO HX MS æqualia inter se sunt; itemque parallelogramma HG HI IN inter se æqualia: & inuper parallelogramma DH $M\Omega$ NT . tria igitur plana solidorum LP KR AY tribus planis æqualia sunt: sed tria tribus oppositis sunt æqualia. ergo tria solida

LP

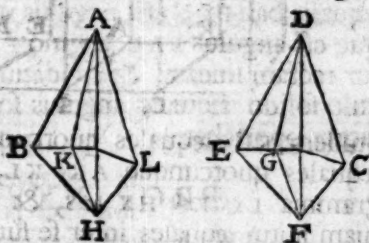
LP KR AY inter se æqualia erunt. eadem ratione & tria
solida ED HD MT sunt æqualia inter se. quotuplex igitur
est basis LF ipsius AF basis, totuplex est & LY solidum solidi
AY. eadem ratione quotuplex est NF basis ipsius basis HF,
totuplex est & solidum NY ipsius ED solidi: & si basis LF
est æqualis basi NF, & solidum LY solido NY æquale erit;
& si basis LF superat NF basim, & LY solidum NY super-
abit; & si minor, minus. quatuor igitur magnitudinibus ex-
istentibus, duabus scilicet basibus AF FH, & duobus solidis
AY ED; sumpta sunt æque multiplicia, basis quidem AE, &
AY solidi, videlicet basis LF, & solidum LY: basis vero
HF, & ED solidi, nempe basis NF, & solidum NY. & de-
monstratum est si basis LF superat basim NF, & LY soli-
dum solidum NY superare; & si æqualis æquale; & si minor
minus. est igitur ^{d 6. Diffn.} ut AF basis ad basim FH, ita AY solidum
ad solidum ED. Quare si solidum parallelepipedum plano se-
cetur, oppositis planis parallelo; erit ut basis ad basim, ita
solidum ad solidum. Quod oportebat demonstrare.

PROP. XXVI. PROBL.

*Ad datam rectam lineam, & ad datum in ipsa pun-
ctum dato angulo solido æqualem solidum angulum
constituere.*

Sit data quidem recta linea AB, datum autem in ipsa
punctum A, & datus solidus angulus ad D qui EDC EDF
FDC angulis planis continetur. oportet ad datam rectam
lineam AB, & ad datum in ipsa punctum A, dato angulo
solido ad D æqualem soli-
dum angulum constituere.

Sumatur in linea DF quod-
vis punctum F, à quo ad
planum per ED DC transi-
ens ducatur perpendicularis FG, & plano in pun-
cto G occurrat; jungatur-
que DG, & ad rectam lineam AB, & ad datum in ipsa
punctum A, angulo quidem EDC æqualis angulus ^d consti-
tuatur BAL; angulo autem EDG constituatur æqualis BAK.
deinde ipsi DG ponatur æqualis AK, & à puncto K plano
per BAL ad rectos angulos erigatur KH; ponaturque ipsi
GF æqualis KH, & HA jungatur. dico angulum solidum ad
A qui angulis BAL BAH HAL continetur, æqualem esse
solido angulo ad D, angulis EDC EDF FDC contento; su-



^d 11. hujus.

^b 23. primi.

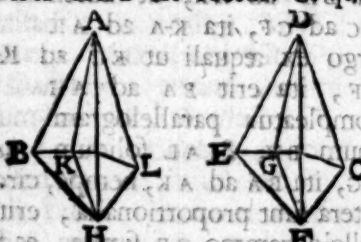
^c 12. hujus.

mantur enim æquales rectæ lineæ AB DE , & jungantur HA KB FE GE , quoniam igitur FE perpendicularis est ad subiectum planum, & ad omnes rectas lineas quæ ipsam contingunt, suntque in subiecto plano, rectos faciet angulos, uterque igitur angulorum FGD EGH rectus est: eadem ratione, & uterque ipsorum HKA HKB est rectus, & quoniam duæ KA AB duabus GD DE æquales sunt altera alteri, & angulos æquales continent; erit basis BK basi EG æqualis. est autem & KH æqualis GF , atque angulos rectos continent, æqualis igitur & HB ipsi FE ; rursus quoniam duæ AK KH duabus DG GE æquales sunt, & rectos continent angulos; erit basis HA basi DF æqualis: estque AB æqualis DE , duæ igitur HA AB duabus FD DE sunt æquales; & basis HB est æqualis basi FE . ergo angulus BAH angulo EDF æqualis erit. eadem ratione, & angulus HAL angulo FDC est æqualis, quandoquidem si assumamus æquales AL DC , & jungamus KL HL GC FC , quoniam totus BAL est æqualis toti EDC , quorum BAK ipsi EDG ponatur æqualis; erit reliquus KAL æqualis reliquo GDC . & quoniam duæ KA AL duabus GD DC æquales sunt, & angulos æquales continent; basis KL basi GC æqualis erit. est autem & KH æqualis GF , duæ igitur LK KH , duabus CG GF sunt æquales; angulosque rectos continent: ergo basis HL æqualis est basi FC . rursus quoniam duæ HA AL , duabus FD DC æquales sunt, & basis HL æqualis basi FC ; erit angulus HAL æqualis angulo FDC , atque est angulus BAL angulo EDC æqualis. Ad datam igitur rectam lineam, & ad datum in ipsa punctum, dato angulo solido æqualis angulus solidus constitutus est. Quod facere oportebat.

PROP. XXVII. PROBL.

Ad datam rectam lineam dato solido parallelepipedo simile, & similiter positum solidum parallelepipedum describere.

Sit recta quidem linea AB ; datum vero solidum parallelepipedum CD . oportet ad datam rectam lineam AB dato solido parallelepipedo CD simile, & similiter positum solidum parallelepipedum describere. Constituatur ad rectam lineam AB , &



& ad datum in ipsa punctum A angulo solido ad C æqua-
lis angulus, qui angulis BAN HAK KAB continetur, ita
ut angulus quidem BAN æqualis sit angulo ECF, angulus
vero BAK angulo ECC, &
adhuc angulus HAK angulo
GCF, & fiat ut EC ad CE,
ita BA ad AK, ut autem
GC ad CF, ita KA ad AH.
ergo ex æquali ut EC ad
CF, ita erit EA ad AH.

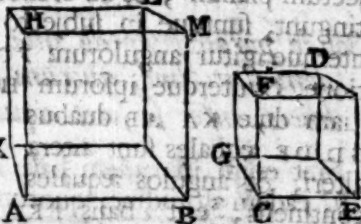
compleatur parallelogram-
mum BH, & AL solidum. quoniam igitur est ut EC ad
CG, ita BA ad AK, nempe, circa æquales angulos ECC BAK
latera sunt proportionalia; erit parallelogrammum KB pa-
rallelogrammo GE simile. eadem quoque ratione paral-
lelogrammum KH simile est parallelogrammo GF, & paral-
lelogrammum HB parallelogrammo FE. tria igitur paral-
logramma solidi AL tribus parallelogrammis solidi CD simi-
lia sunt: sed tria tribus oppositis sunt æqualia, & similia.
ergo totum AL solidum toti solido CD simile erit. Ad datam
igitur rectam lineam AB dato solido parallelepipedo CD si-
mile, & similiter positum solidum parallelepipedum AL de-
scriptum est. Quod facere oportebat.

PROP. XXVIII. THEOR.

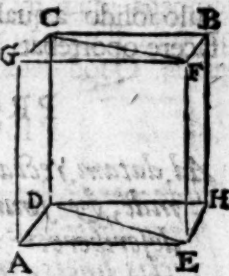
*Si solidum parallelepipedum plano secetur per diagona-
les oppositorum planorum, ab ipso plano bifariam
secabitur.*

Solidum enim parallelepipedum AB plano CDEF secetur
per diagonales oppositorum planorum, videlicet CF DE. dico
solidum AB a plano CDEF bifariam secari.

Quoniam enim æquale est CGF trian-
gulum triangulo CBF, triangulum vero
ADE triangulo DEH; est autem & CA
parallelogrammum parallelogrammo BE
æquale, oppositum enim est; & paral-
lelogrammum CE æquale parallelogram-
mo CH; erit prisma contentum duobus
triangulis CGF ADE, & tribus paral-
lelogrammis GE AC CE æquale prismati,
quod continetur duobus triangulis CFB
DEH, & tribus parallelogrammis CH
BE CE, etenim æqualibus planis, &
numero & magnitudine continentur: ergo totum AB soli-
dum



b 12. sexta



b 24. hujus.

dum à plano CDEF bifariam secatur. Quod demonstrare oportebat.

PROP. XXIX. THEOR.

Solida parallelepipeda quæ in eadem sunt basi, & eadem altitudine, quorum stantes sunt in eisdem rectis lineis, inter se sunt æqualia.

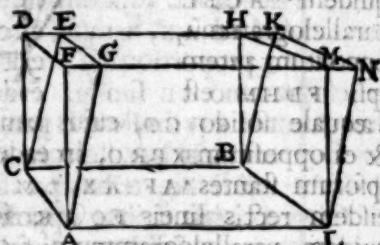
Sint enim in eadem basi AB solida parallelepipeda CM CN, eadem altitudine, quorum stantes AF AG LM LN CD CE BH BK sint in eisdem rectis lineis FN DK, dico solidum CM solido CN æquale esse. Quoniam enim parallelogrammum est utrumque ipsorum CH CK; erit CB, * 34 primi. utrique ipsarum DH EK æqualis, ergo & DH est æqualis EK. communis auferatur EH. reliqua igitur DE æqualis est reliquæ HK. quare * 8. primi. & DEC triangulum est æquale triangulo HKB. parallelogrammum autem DG est æquale parallelogrammo HN. eadem ratione & AFG triangulum æquale est triangulo LMN. est autem parallelogrammum CF parallelogrammo BM, & parallelogrammum CG parallelogrammo BN æquale: opposita enim sunt. ergo & prisma contentum duobus triangulis AFG DEC, & tribus parallelogrammis AD DG GC est æquale prismati, quod duobus triangulis LMN HKB, & tribus parallelogrammis BM NH BN continetur. commune apponatur solidum, cuius basis quidem parallelogrammum AB, oppositum autem ipsi GEHM. ergo totum CM solidum parallelepipedum toti solido parallelepipedo CN est æquale. Solida igitur parallelepipeda quæ in eadem sunt basi, & eadem altitudine, quorum stantes sunt in eisdem rectis lineis, inter se sunt æqualia. Quod demonstrare oportebat.

PROP. XXX. THEOR.

Solida parallelepipeda quæ in eadem sunt basi, & eadem altitudine, quorum stantes non sunt in eisdem rectis lineis, inter se sunt æqualia.

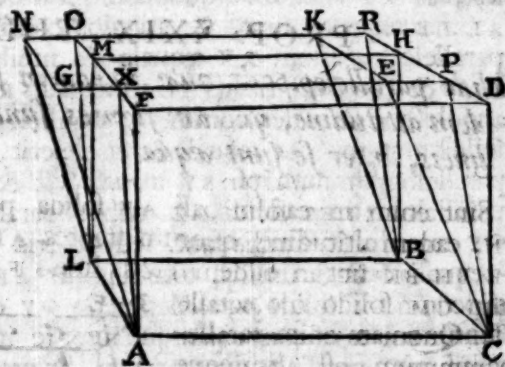
Sint in eadem basi AB solida parallelepipeda CM CN & eadem altitudine, quorum stantes AF AG LM LN CD CE

BH



non sunt in eisdem rectis lineis: dico solidum CM
solido CN æquale esse. producantur enim NK DH, & GE
FM, convenient-

que inter se pun-
ctis R X; & ad-
huc producantur
FM GE ad O P
puncta: & AX
LO CP BR jun-
gantur. solidum
CM, cujus basis
quidem ACBL
parallelogrammū,
oppositum autem
ipfi FDHM est

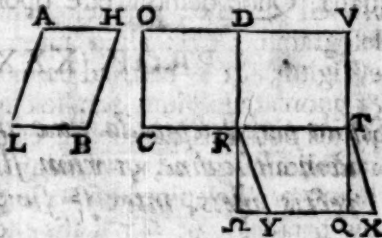


æquale solido CO, cujus basis parallelogrammum ACBL & ei oppositum XPRO, in eadem enim sunt basi ACBL, & ipsorum stantes AF AX LM LO CD CP BH BR sunt in eisdem rectis lineis FO DR. sed solidum CO, cujus basis quidem parallelogrammum ACBL, oppositum autem ipfi XPRO est æquale solido CN, cujus basis ACBL parallelogrammum, & ipfi oppositum GEKN. etenim in eadem sunt basi ACBL, & eorum stantes AG AX CE CP LN LO BK BR sunt in eisdem rectis lineis GP NR. quare & CM solidum solido CN æquale erit. Solida igitur parrallelepipedā quæ in eadem sunt basi, & eadem altitudine, quorum stantes non sunt in eisdem rectis lineis, inter se sunt æqualia. Quod demonstrare oportebat.

PROP. XXXI. THEOR.

Solida parallelepipedā quæ in æqualibus sunt basibus, & eadem altitudine, inter se sunt æqualia.

Sint in æqualibus basibus AB CD solida parallelepipedā AE CF, & eadem altitudine. dico solidum AE solido CF æquale esse. sint primo stan-



tes HK BE AG LM OP DF CE RS ad rectos angulos basibus AB CD: angulus autem ALB angulo CRD sit inæqualis, & producatu-
ipfi CR in directum RT:
constituaturque ad rectam

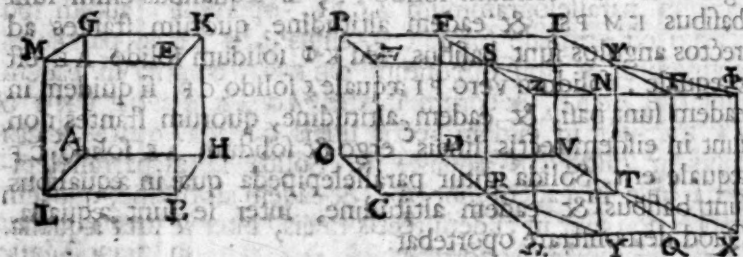
lineam RT, & ad punctum in ipsa R, angulo ALB æqualis angulus TRY. & ponatur ipfi quidem AL æqualis

M 4

RT,

23. prim.

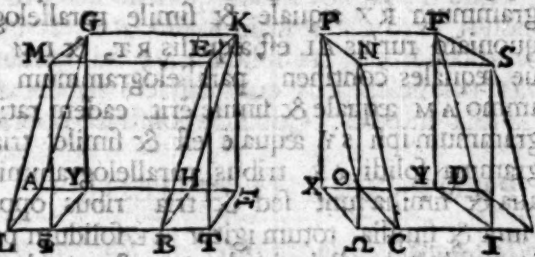
RT ipsi vero LE æqualis RY , & ad punctam Y ipsi RT
 parallela ducatur XY , & compleaturque parallelogrammum
 RX , & ϕY solidum, quoniam igitur duæ PR & Y duabus
 AL LE æquales sunt, & angulos continent æquales, erit
 parallelogrammum RX æquale & simile parallelogrammo
 HL : & quoniam rursus AL est æqualis RT , & DM ipsi RS ,
 angulosque æquales continent, parallelogrammum RY pa-
 rallelogrammo AM æquale & simile erit. eadem ratione LE
 parallelogrammum ipsi SY æquale est & simile. tria igitur
 parallelogramma solidi AE tribus parallelogrammis solidi
 ϕY æqualia & similia sunt. sed & tria tribus opposita &
 24 hujus. æqualia sunt & similia. totum igitur AE solidum paralle-
 pipedum toti solido parallelepipedo ϕY est æquale. produ-
 cantur DR & XY , convenientque inter se in puncto Ω , & per
 ipsi $D\Omega$ parallela ducatur TQ , & producantur TQ & D ,
 & convenient in V , compleanturque solida ΩY & RT . solidum
 igitur ϕY cuius basis est $R Y$ parallelogrammum, oppositum
 29. hujus. autem ipsi ΩT est æquale solido ϕY , cuius basis est $R Y$
 parallelogrammum, & oppositum ipsi ϕY , in eadem enim



sunt basi $R Y$, & eadem altitudine, & eorum stantes $R\Omega$ & RY
 TQ & TX & SN & $Y\Gamma$ & ϕ in eisdem sunt rectis lineis ΩX & $Z\phi$.
 sed solidum ϕY æquale est solido AE . ergo & ϕY solido
 AE est æquale. præterea quoniam parallelogrammum $RYXT$
 est æquale parallelogrammo ΩT , etenim in eadem est basi
 RT , & in eisdem parallelis $R\Gamma$ & ΩX , & parallelogrammum
 $RYXT$ parallelogrammo CD est æquale, quoniam & ipsi
 AB est æquale; parallelogrammum ΩT æquale est paral-
 lelogrammo CD : aliud autem est parallelogrammum ΩT .
 est igitur ut CD basis ad basim DT , ita ΩT ad ipsam DT .
 & quoniam solidum parallelepipedum CI secatur plano RT
 25 hujus. planis oppositis parallelo; erit ut CD basis ad basim DT ,
 ita solidum CF ad RI solidum. eadem ratione quoniam so-
 lidum parallelepipedum ΩI secatur plano RY oppositis pla-
 nis parallelo, ut ΩT basis ad basim DT , ita erit solidum
 ΩY ad RI solidum. sed ut CD basis ad basim DT , ita basis
 ΩY ad ipsam DT , ut igitur solidum CF ad RI solidum, ita
 solidum

solidum $\Omega \times$ ad solidum $R I$ quod cum utrumque solidorum
 $C F$ $\Omega \times$ ad solidum $R I$ eandem habeat proportionem, soli-
 dum $C F$ solido $\Omega \times$ est æquale. solidum autem $\Omega \times$ ostensum
 est æquale solido $A E$, ergo & $A E$ ipsi $C F$ æquale erit.

9. quatuor.



Sed non sint stantes $A G$, $H K$, $E E$, $L M$, $C N$, $O P$, $D F$, $R S$ ad rectos
 angulos ipsis $A B$, $C D$ basibus. dico rursus solidum $A E$ æqua-
 le esse solido $C F$. ducantur f à punctis K , E , G , M , P , F , N , S *11. hujus.*
 ad subiectum planum perpendiculares $K Z$, $E T$, $G Y$, $M \Phi$, $P X$,
 $F \Psi$, $N \Omega$, $S I$, & plano in punctis Z , T , Y , Φ , X , Ψ , Ω , I occur-
 rant, & jungantur $Z T$, $Y \Phi$, $Z Y$, $T \Phi$, $X \Psi$, $X \Omega$, ΩI , ΨI . æquale
 igitur est $K \Phi$ solidum solido $P I$; in æqualibus enim sunt
 basibus $K M$, $P S$, & eadem altitudine, quorum stantes ad
 rectos angulos sunt basibus. sed $K \Phi$ solidum solido $A E$ est
 æquale: solidum vero $P I$ æquale s solido $C F$, si quidem in
 eadem sunt basi, & eadem altitudine, quorum stantes non
 sunt in eisdem rectis lineis. ergo & solidum $A E$ solido $C F$
 æquale erit. Solida igitur parallelepipedum quæ in æqualibus
 sunt basibus & eadem altitudine, inter se sunt æqualia.
 Quod demonstrare oportebat.

30. hujus.

PROP. XXXII. THEOR.

*Solida parallelepipedum quæ eandem habent altitudi-
 nem inter se sunt ut bases.*

Sint solida parallelepipedum $A B$, $C D$, quæ eandem altitu-
 dinem habeant. dico inter se esse ut bases; hoc est ut $A B$
 basis ad basim $C F$. ita solidum $A B$ ad
 solidum $C D$ ap-
 plicetur enim ad
 rectam lineam $F G$
 parallelogrammo
 $A E$ æquale $F H$, &
 à basi $F H$ eadem A
 altitudine ipsi $C D$ solidum parallelepipedum $C K$ compleatur.
 solidum igitur $A E$ solido $C K$ est æquale; in æqualibus



31. hujus.

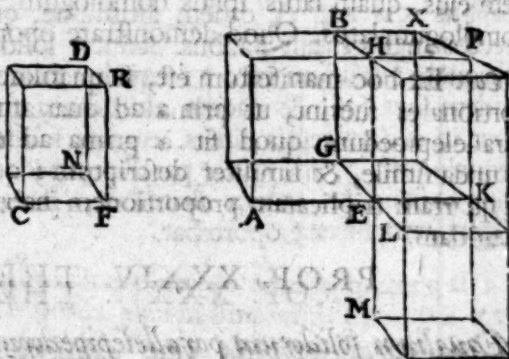
enim

enim sunt basibus AE FH , & eadem altitudine: itaque quoniam
 25. hujus. am solidum parallelepipedum CK plano DE secatur oppositis
 planis parallelo; erit ut AE basis ad basim FC ; ita solidum
 HD ad DC solidum; atque est basis quidem FH basi AE æ-
 qualis; solidum vero CK æquale solido AB ; est igitur &
 ut AE basis ad basim CF , ita solidum AB ad solidum CD .
 Quare solida parallelepipeda quæ eandem habent altitudi-
 nem inter se sunt ut bases. Quod demonstrare oportebat.

PROP. XXXIII. THEOR.

*Similia solida parallelepipeda inter se sunt in triplicata
 proportionem homologorum laterum.*

Sint similia solida parallelepipeda $ABCD$. latus autem AE
 homologum sit lateri CF . Dico solidum AB ad CD solidum
 triplicatam proportionem habere ejus, quam habet AE
 ad CF . producantur enim KE EL EM in directum ipsis AE
 GE HE : & ipsi quidem CF æqualis ponatur EK ; ipsi vero
 FN æqualis EL ;
 & adhuc ipsi FR
 æqualis EM , &
 KL parallelo-
 grammum, & KO
 solidum comple-
 atur. quoniam i-
 gitor duæ KE EL
 duabus CF FN
 æquales sunt; sed
 & angulus KEL
 angulo CFN est
 æqualis; quia &
 angulus AEG ipsi CFN ob similitudinem solidorum AB CD :
 erit & KL parallelogrammum simile & æquale parallelogram-
 mo CN . eadem ratione, & parallelogrammum KM æquale est
 & simile parallelogrammo CR , & adhuc parallelogrammum
 OE ipsi DF parallelogrammo. tria igitur parallelogramma
 solidi KO tribus parallelogrammis CD solidi æqualia & si-
 milia sunt. sed tria tribus oppositis æqualia sunt & similia
 totum igitur KO solidum æquale est & simile toti solido
 CD . compleatur GK parallelogrammum; & à basibus qui-
 dem GK KL parallelogrammis, altitudine vero eadem ipsi
 AB , solida compleantur AX LP . & quoniam ob similitudi-
 nem solidorum AB CD est ut AE ad CF , ita EG ad FN ; &
 EH ad FR ; æqualis autem FC ipsi EK , & FN ipsi EL , &



FR ipsi BM erit ut AE ad EK, ita GE ad EL, & HE ad EM, sed ut AE quidem ad EK, ita AG parallelogrammum ad parallelogrammum GK, ut autem GE ad EL, ita GK ad KE: & ut HE ad EM, ita PE ad KM. & ut igitur AG parallelogrammum ad parallelogrammum GK, ita GK ad KL, & PE ad KM. sed ut AG quidem ad GK, ita AB solidum ad solidum EX: ut autem GK ad KL, ita solidum EX ad PL solidum: & ut PE ad KM, ita PL solidum ad solidum KO. & ut igitur solidum AB ad solidum EX, ita EX ad PL, & PL ad KO. si autem quatuor sint magnitudines deinceps proportionales, prima ad quartam triplicatam proportionem habet ejus, quam ad secundam. ergo & AB solidum ad solidum KO triplicatam habet proportionem ejus, quam AB ad EX. sed ut AB ad EX, ita AG parallelogrammum ad parallelogrammum GK; & AE recta linea ad ipsam EK. quare & AB solidum ad solidum KO triplicatam proportionem habebit ejus, quam AE habet ad EK. æquale autem est solidum KO solido CD, & recta linea EK rectæ CF est æqualis. ergo & AB solidum ad solidum CD triplicatam habet proportionem ejus, quam latus ipsius homologum AE habet ad CF homologum latus. Quod demonstrare oportebat.

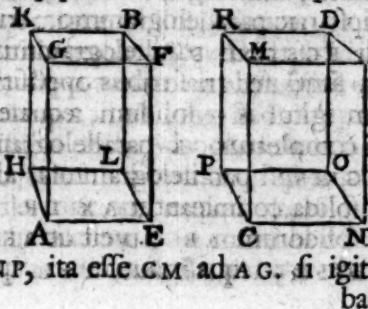
*Cor. Ex hoc manifestum est, si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, ut prima ad quartam, ita esse solidum parallelepipedum quod fit à prima ad solidum quod à secunda simile, & similiter descriptum; quoniam & prima ad quartam triplicatam proportionem habet ejus, quam ad secundam.

PROP. XXXIV. THEOR.

Equalium solidorum parallelepipedorum recipiuntur bases & altitudines, & quorum solidorum parallelepipedorum recipiuntur bases & altitudines, ea inter se sunt æqualia.

Sint æqualia solida parallelepipeda AB CD. dico ipsorum

bases & altitudines reciprocari, hoc est ut EH basis ad basim NP, ita esse altitudinem solidi CD ad solidi AB altitudinem. Sint enim primo itantes AG EF LB HK CM NX OD PR ad rectos angulos basibus ipsorum. dico ut EH basis ad basim NP, ita esse CM ad AG. si igitur



basis EH basi NP sit æqualis, est autem & AB solidum æquale solido CD ; erit & CM æqualis ipsi AG . si 2 enim basibus EH NP æqualibus existentibus non sint AG CM altitudines æquales, neque AB solidum solido CD æquale erit, ponitur autem æquale, non igitur inæqualis est altitudo CM altitudini AG , ergo æqualis sit necesse est; ac propterea ut EH basis ad basim NP ,

ita erit CM ad AG .

At vero non sit basis

EH æqualis basi NP .

sed EH sit major, est

autem & AB soli-

dum solido CD æ-

quale, ergo major est

CM ipsa AG ; alioqui

rursus sequeretur so-

lida AB CD æqualia non esse, quæ ponuntur æqualia, ita-

que ponatur CT æqualis ipsi AG ; & à basi quidem NP , al-

titudine autem CT solidum parallelepipedum VC compleat-

tur. quoniam igitur solidum AB solido CD est æquale, aliud

47. quinti. autem aliquod est VC , & æqualia ad idem eandem habent

proportionem; erit ut AB solidum ad solidum CV , ita CD

solidum ad solidum CV , sed ut AB solidum ad solidum CV ,

b 32. hujus. ita basis EH ad NP basim; æque alta enim sunt AB CV solida,

c 25. hujus. ut autem solidum CD ad ipsum CV , ita MP basis ad basim

PT , & MC ad CT . & igitur ut basis EH ad NP basim, ita

MC ad CT , est autem CT æqualis AG , ergo & ut EH basis

ad basim NP , ita MC ad AG , quare solidorum parallelepi-

pedorum AB CD bases & altitudines reciprocantur. Rursus

solidorum parallelepipedorum AB CD bases & altitudines

reciprocentur: fitque ut EH basis ad basim NP , ita solidi

CD altitudo ad altitudinem solidi AB . Dico solidum AB so-

lido CD æquale esse. sint enim rursus stantes ad rectos an-

gulos basibus. & si quidem basis EH sit æqualis basi NP ,

estque ut EH basis ad basim NP , ita altitudo solidi CD ad

solidi AB altitudinem: erit solidi CD altitudo altitudini so-

lidi AB æqualis. solida autem parallelepipeda, quæ sunt in

d 30. hujus. æqualibus basibus & eadem altitudine inter se æqualia sunt.

ergo solidum AB solido CD est æquale, sed non sit EH ba-

sis æqualis basi NP , & sit EH major, major igitur est & so-

lidi CD altitudo altitudine solidi AB , hoc est CM ipsa AG .

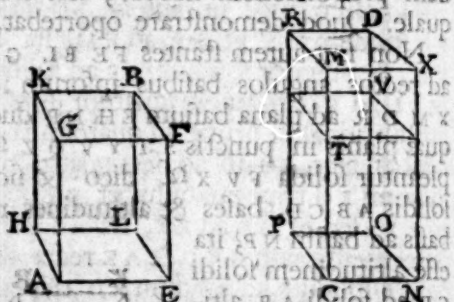
ponatur ipsi AG æqualis rursus CT , & similiter solidum CV

compleatur. itaque quoniam est ut EH basis ad basim NP ,

ita MC ad ipsam AG ; æqualis autem est AG ipsi CT ; erit ut

basis EH ad NP basim, ita MC ad CT . sed ut basis EH ad

NP

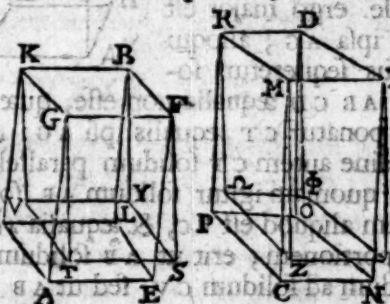


NP
funt
bafis
dum
quod
dem
qual
N
ad re
x m
quæ
plear
solid
bafis
esse
c d
tadin
nim
do s
lido
est
eade
bafis
titud
& fo
bafis
eifde
æqu
titud
altitu
na fo
bafis
bafis
fidi
fine
igitu
titud
A b
rum
cipr
tudo
solid
mian
titud
FK
NP

NP basim; ita AB solidum ad solidum VC; æque alta enim sunt solida AB CV. ut autem MC ad CT; ita & MP basis ad basim PT; & solidum CD ad CV solidum. & igitur ut solidum AB ad solidum CV; ita CD solidum ad solidum CV. quod cum utrumque solidorum AB CD ad ipsum CV eandem proportionem habeat; erit AB solidum solido CD æquale. Quod demonstrare oportebat.

Non sunt autem stantes FE BL GAKH XN DOMCRP ad rectos angulos basibus ipsorum: & a punctis FGBR XM DR ad plana basium EH NP ducantur perpendiculares; quæ planis in punctis STYVQZΩΦ occurrant & compleantur solida FVXΩ. dico & sic æqualibus existentibus solidis AB CD, bases & altitudines reciprocari, scilicet ut EH

basis ad basim NP, ita esse altitudinem solidi CD ad solidi AB altitudinem. quoniam enim solidum AB solido CD est æquale; solidum autem AB æquale est solidum BT; in eadem namque sunt basi FK, & eadem altitudine; quorum stantes non sunt in eisdem rectis lineis:



& solidum DC est æquale solido DZ, quod in eadem sunt basi XR, & eadem altitudine, quorum stantes non sunt in eisdem rectis lineis; erit & solidum BT solido DZ æquale.

æqualium autem solidorum parallelepipedorum, quorum altitudines basibus ipsorum sunt ad rectos angulos, bases & altitudines reciprocantur. est igitur ut FK basis ad basim XR

ita solidi DZ altitudo ad altitudinem solidi BT. atque est basis quidem FK basi EH æqualis, basis vero XR æqualis basi NP. quare ut EH basis ad basim NP, ita est altitudo solidi DZ ad solidi BT altitudinem. eadem autem sunt altitudines solidorum DZ DC; itemque solidorum BT BA. est igitur ut EH basis ad basim NP, ita solidi DC altitudo ad altitudinem solidi AB. ergo solidorum parallelepipedorum AB CD bases & altitudines reciprocantur. Rursum solidorum parallelepipedorum AB CD bases & altitudines reciprocantur, utque ut EH basis ad basim NP, ita altitudo solidi CD ad solidi AB altitudinem. dico solidum AB solido CD æquale esse. iisdem namque constructis, quoniam ut EH basis ad basim NP, ita solidi CD altitudo ad altitudinem solidi AB; & basis quidem EH est æqualis basi FK; NP vero ipsi XR. erit ut FK basis ad basim XR, ita altitudo

30. hujus.

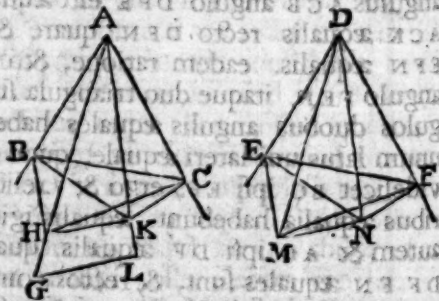
Ex ante demonstratis.

altitudo solidi CD ad solidi AB altitudinem. eadem autem sunt altitudines solidorum AB & T , & ipsorum CD & Z . est igitur ut FK basis ad basim XR , ita solidi DZ altitudo ad altitudinem solidi BT . quare solidorum BT & DZ parallelepipedorum bases & altitudines reciprocantur, quorum autem solidorum parallelepipedorum altitudines sunt ad rectos angulos basibus ipsorum, & bases & altitudines reciprocantur, ea inter se sunt æqualia. ergo BT solidum solido DZ est æquale. sed solidum quidem BT æquale est solido BA , etenim in eadem sunt basi FK , & eadem altitudine, quorum stantes non sunt in eisdem rectis lineis: solidum vero DZ est æquale solido DC , si quidem in eadem sunt basi XR , & eadem altitudine, & non in eisdem rectis lineis. ergo & solidum AB solido CD est æquale. Quod demonstrare oportebat.

PROP. XXXV. THEOR.

Si sint duo anguli plani æquales, quorum verticibus sublimes rectæ lineæ insistant, quæ cum rectis lineis à principio positis angulos contineant æquales, alterum alteri, in sublimibus autem sumantur quævis puncta, atque ab ipsis ad plana in quibus sunt anguli perpendiculares ducantur; & à punctis, quæ à perpendicularibus sunt in planis ad primos angulos jungantur rectæ lineæ: cum sublimibus æquales angulos continebunt.

Sint duo anguli rectilinei æquales BAC & EDF : & à punctis A & D sublimes rectæ lineæ AG & DM constituantur, quæ cum rectis lineis à principio positis æquales angulos contineant, alterum alteri: angulum quidem MDE æqualem angulo GAB , angulum vero MDF angulo GAC æqualem: & sumantur in ipsis AG & DM quævis puncta G & M , à quibus ad plana per BAC & EDF ducantur perpendiculares GL & MN , occurrentes planis in punctis L & N ; & LA & ND jungantur. dico angulum GAL angulo MEN æqualem esse. ponatur ipsi DM æqualis AM , & per H ipsi GL parallela ducatur HK . est autem GL perpendicularis ad planum per



per BAC ergo & HK ad e planum per BAC perpendicularis $\bullet$ 8. hujus.
 erit. ducantur a punctis K N ad rectas lineas AB AC DF DE
 perpendiculares KC NF KB NE , & HC CB MF FE jungan-
 tur, quoniam igitur quadratum ex HA æquale $\bullet$ est quadra- $\bullet$ 47. primi.
 tis ex HK KA ; quadrato autem ex KA æqualia $\bullet$ sunt ex
 KC CA quadrata; erit quadratum ex HA quadratis ex HK
 KC CA æquale. quadratis autem ex HK KC æquale est qua-
 dratum ex HC . quadratum igitur ex HA quadratis ex HC CA
 æquale erit: & idcirco angulus HCA $\bullet$ est rectus. eadem $\bullet$ 48. primi.
 ratione & angulus DFM rectus est. ergo angulus ACH ipsi
 DFM est æqualis. est autem & HAC angulus æqualis an-
 gulo MDF . duo igitur triangula sunt MDF HAC duos an-
 gulos duobus angulis æquales habentia, alterum alteri, &
 unum latus uni lateri æquale, quod uni æqualium angulo-
 rum subtenditur; videlicet HA ipsi DM . ergo & reliqua
 latera reliquis lateribus $\bullet$ æqualia habebunt, alterum alteri. $\bullet$ 46. primi.
 quare AC est æqualis DF . similiter demonstrabimus & AB
 ipsi DE æquale esse. jungantur HB ME . & quoniam quadra-
 tum ex AH est æquale quadratis ex AK KH ; quadrato au-
 tem ex AK æqualia sunt quadrata ex AB BK : erunt qua-
 drata ex AB BK KH quadrato ex AH æqualia. sed quadra-
 tis ex BK KH æquale est ex BH quadratum; rectus enim
 angulus est HKB , propterea quod & HK perpendicularis est
 ad subjectum planum. quadratum igitur ex AH æquale est
 quadratis ex AB BH . quare angulus ABH rectus est. eadem
 ratione & angulus DEM est rectus. est autem & BAH an-
 gulus æqualis angulo EDM , ita enim ponitur: atque est AH
 æqualis DM . ergo & AB ipsi DE $\bullet$ est æqualis. quoniam
 igitur AC quidem est æqualis DF , AB vero ipsi DE ; erunt
 duæ CA AB duabus FD DE æquales. sed & angulus BAC
 angulo FDE est æqualis. basis $\bullet$ igitur BC basi EF , & trian- $\bullet$ 4. primi.
 gulum triangulo, & reliqui anguli reliquis æquales sunt. ergo
 angulus ACB angulo DFE est æqualis. est autem & rectus
 ACK æqualis recto DFN . quare & reliquus BCK reliquo
 EFN æqualis. eadem ratione, & CBK angulus est æqualis
 angulo FEN . itaque duo triangula sunt BCK EFN , duos an-
 gulos duobus angulis æquales habentia, alterum alteri, &
 unum latus uni lateri æquale, quod est ad æquales angulos,
 videlicet BC ipsi EF . ergo & reliqua latera reliquis late-
 ribus æqualia habebunt. æqualis igitur est CK ipsi FN . est
 autem & AC ipsi DF æqualis. quare duæ AC CK duabus
 DF FN æquales sunt, & rectos continent angulos. basis igi-
 tur AK est æqualis basi DN . & cum AH sit æqualis DM ,
 erit & quod sit ex AH quadratum quadrato ex DM æquale.
 sed quadrato ex AH æqualia sunt ex AK KH quadrata; ete-
 nim

nim rectus est angulus AKH . quadrato autem ex DM æqualia sunt quadrata ex DN & NM , quod angulus DNM rectus fit. quadrata igitur ex AK & KH quadratis ex DN & NM sunt æqualia; quorum quadratum ex AK æquale est quadrato ex DN . ergo reliquum ex KH quadratum reliquo quadrato ex NM est æquale. & ideo recta linea HK ipsi MN æqualis. quod cum duæ HA & AK duabus MD & DN æquales sint, altera alteri, & basis HK basi NM ostensa fit æqualis; angulus HAK angulo MDN æqualis *erit*. Quod oportebat demonstrare.

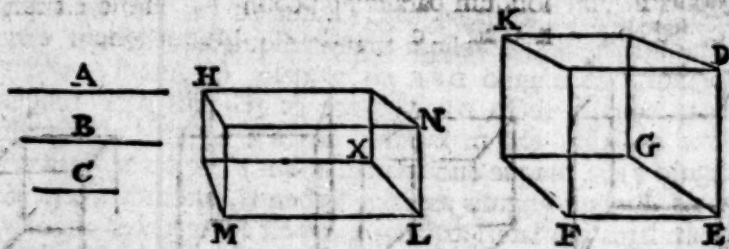
f. 8. primi.

Cor. Ex hoc manifestum est, si sint duo anguli plani rectilinei æquales, ab ipsis autem constituentur sublimes rectæ lineæ æquales, quæ cum rectis lineis à principio positis æquales contineant angulos, alterum alteri, perpendiculares, quæ ab ipsis ad plana in quibus sunt primi anguli ducuntur, inter se æquales esse.

PROP. XXXVI. THEOR.

Si tres rectæ lineæ proportionales sint, solidum parallelepipedum quod à tribus fit æquale est solido parallelepipedo quod fit à media, æquilatERO quidem, æquiangulo autem antedicto.

Sint tres rectæ lineæ proportionales A B C , fit scil. ut A ad B ita B ad C . dico solidum quod fit ex ipsis A B C , æquale esse solido quod fit ex B , æquilatERO quidem, æquiangulo autem antedicto. Exponatur solidus angulus ad E contentus tribus angulis planis DEG GEF FED ; & ipsi quidem B ponatur æqualis unaquæque ipsarum DE GE EF , & solidum



parallelepipedum EK compleatur: ipsi vero A ponatur æqualis LM ; & ad rectam lineam LM , & ad punctum in ipsa L constitutur angulo solido ad E æqualis angulus contentus NLX MLN , & ponatur ipsi quidem B æqualis LN , ipsi vero C æqualis LX . quoniam igitur est ut A ad B ita B ad C , æqualis autem est A ipsi LM , & B unicuique ipsarum LN EF EG ED , & C ipsi LX ; erit ut LM ad EF

** 26. hujus.*

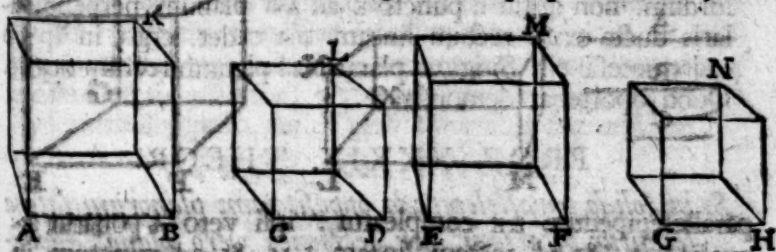
ita

ita GE ad IX : & circum æquales angulos MEX GEE , latera sunt reciproca, ergo MX parallelogrammum parallelogrammo GE est æquale. & quoniam duo anguli plani recti lineæ æquales sunt GEF XLN , & in ipsis sublimes rectæ lineæ constituuntur LN ED æquales inter se, & cum rectis lineis à principio positis æquales continentes angulos, alterum alteri; erunt perpendiculares quæ à punctis N D ad planum per XLN GEF ducuntur, inter se æquales, ergo solidum $LHEK$ eadem sunt altitudine. quæ verò in æqualibus basibus sunt solida parallelepipedum, & eadem altitudine, inter se sunt æqualia, ergo solidum HL æquale est solido EX : atque est solidum quidem HL quod fit à tribus A B C , solidum vero EX quod fit ex B . Si igitur tres rectæ lineæ proportionales sint, solidum parallelepipedum quod fit à tribus, æquale est solido parallelepipedo quod fit, &c. Quod demonstrare oportebat.

PROP. XXXVII. THEOR.

Si quatuor rectæ lineæ proportionales sint, & quæ ab ipsis fiunt solida parallelepipedum similia, & similiter descripta proportionalia erunt. Et si quæ ab ipsis fiunt solida parallelepipedum similia, & similiter descripta proportionalia sint; & ipsæ rectæ lineæ proportionales erunt.

Sint quatuor rectæ lineæ proportionales AB CD EF GH , sit scilicet ut AB ad CD , ita EF ad GH , & describantur ab ipsis AB CD EF GH similia, & similiter posita solida parallelepipedum KA LC ME NO . dico ut KA ad LC , ita esse ME ad NO . Quoniam enim solidum parallelepipedum KA simile est ipsi LC , habebit KA ad LC triplicatam proportionem ejus



quam AB habet ad CD . eadem ratione & solidum ME ad ipsum NO triplicatam proportionem habebit ejus quam habet EF ad GH : atque est ut AB ad CD , ita EF ad GH . ut igitur KA ad LC , ita ME ad NO . Sed sit ut solidum KA ad solidum LC , ita ME solidum ad solidum NO . dico ut rectæ

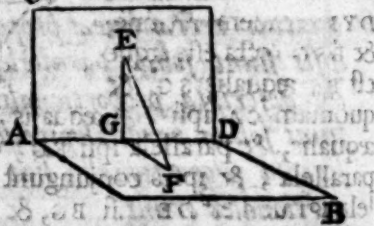
recta linea AB ad rectam CD, ita esse rectam EF ad ipsam GH, quoniam enim rursus AK ad LC triplicatam proportionem habet, ejus quam AB habet ad CD; habet autem, & ME ad NG triplicatam proportionem ejus quam EF ad GH; atque ut AK ad LC, ita ME ad NG: erit ut AB ad CD, ita EF ad GH. Si igitur quatuor rectæ lineæ proportionales sint, &c. Quod oportebat demonstrare.

PROP. XXXVIII. THEOR.

Si planum ad planum rectum sit; & ab aliquo puncto eorum quæ sunt in uno plano, ad alterum planum perpendicularis ducatur; ea in communem planorum sectionem cadet.

Planum nempe CD ad planum AB rectum sit, communis autem eorum sectio sit AD, & in ipso CD plano, quodvis punctum E sumatur. dico perpendicularem quæ à puncto E ad planum AB ducitur,

cadere in ipsam AD. Non enim; sed si fieri potest, cadat extra, ut EF; & plano AB in puncto F occurrat: à puncto autem F ad DA in plano AB perpendicularis ducatur FG, quæ quidem



& plano CD ad rectos angulos erit; & EG jungatur, quoniam igitur FG plano CD est ad rectos angulos; contingit autem ipsam recta linea EG quæ est in eodem CD plano: erit angulus FGE rectus. sed & EF plano AB ad rectos angulos est; rectus igitur est angulus EFG, quare trianguli EFG duo anguli duobus rectis sunt æquales; quod est absurdum. non igitur à puncto E ad AB planum perpendicularis ducta extra rectam lineam DA cadet. ergo in ipsam cadat necesse est. Si igitur planum ad planum rectum sit, &c. Quod oportebat demonstrare.

PROP. XXXIX. THEOR.

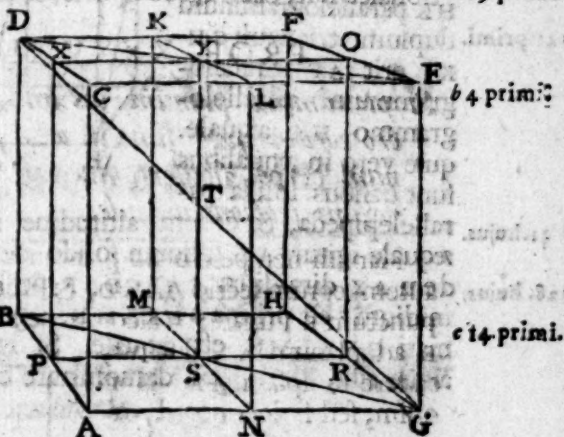
Si in solido parallelepipedo oppositorum planorum latera secantur bisariam, per sectiones vero plana ducantur, communis planorum sectio, & solidi parallelepipedum diameter, sese bisariam secabunt.

In solido enim parallelepipedo AF, oppositorum planorum CF, AH latera bisariam secantur in punctis K, L, M, N, X, O, P, R.

& per sectiones plana ducantur KN XR ; communis autem planorum sectio sit YS , & solidi parallelepipedī diameter sit DG . dico YS DG sese bifariam lecare, hoc est YT quidem ipsi TS , DT vero ipsi TG æqualem esse. Jungantur enim DY YE BS SG . quoniam igitur DX parallela est ipsi OE , alterni anguli DXY YOE inter se æquales sunt. & quoniam

DX quidem est æqualis OE , XY vero ipsi YO , & angulos æquales continent; erit b basis DY æqualis basi YE . & triangulum DXY triangulo YOE , & reliqui anguli reliquis angulis æquales, angulus igitur XYD est æqualis angulo OYE , & ob id c recta linea est DYE . eadem ratione, & BSG recta est, atque est BS æqualis SG . &

quoniam CA ipsi DB æqualis est & parallela, & CA est æqualis, & parallela ipsi EG ; erit & DB ipsi EG æqualis & parallela; & ipsas conjungunt rectæ lineæ DE GB ; parallela igitur d est DE ipsi BG , & sumpta sunt in utraque ipsa $423.$ primi.
 rum quævis puncta DY GS , & junctæ sunt DG YS . ergo DG YS in uno sunt plano. quod cum DE sit parallela BG , e $7.$ huius.
 erit & EDT angulus angulo BGT æqualis f , alterni enim sunt. est autem & DTY angulus æqualis g ipsi GTS . duo f $17.$ primi.
 igitur sunt triacula DTY GTS duos angulos duobus angulis æquales habentia, & unum latus uni lateri æquale, quod uni æqualium angulorum subtenditur, videlicet DY ipsi GS : dimidia enim sunt ipsorum DE BG , ergo & reliqua latera reliquis lateribus æqualia habebunt. quare DT quidem est æqualis TG , YT vero ipsi TS . Si igitur in solido parallelepipedo, &c. Quod oportebat demonstrare.



PROP. XL. THEOR.

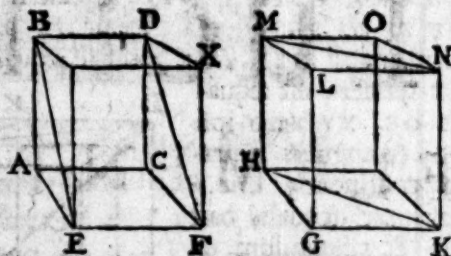
Si sint duo prismata æque alta, quorum unum quidem basim habeat parallelogrammum, alterum vero triangulum, & parallelogrammum duplum sit trianguli, ea inter se æqualia erunt.

Sint prismata æque alta $ABCDEFGH$ $GHKLMN$ & unum quidem basim habeat parallelogrammum AF , alterum vero

N 2

GHK

GHK triangulum, & duplum fit AF parallelogrammum
 trianguli GHK. dico prisma ABCDEF prismati GHKLMN
 æquale esse. Compleantur enim AX GO solida. & quoniam
 parallelogrammum AF
 trianguli GHK est du-
 plum; est autem &
 HK parallelogrammum
 41. primi. duplum trianguli GH-
 K; erit AF parallelo-
 grammum parallelo-
 grammum HK æquale.
 quæ vero in æqualibus
 sunt basibus solida pa-
 31. hujus. rallelepipedæ, & eadem altitudine inter se æqualia sunt.
 æquale igitur AX solidum solido GO. atque est solidi qui-
 28. hujus, dem AX dimidium ABCDEF prisma, solidi vero GO di-
 midium est prisma GHKLMN. ergo ABCDEF prisma pris-
 mati GHKLMN est æquale. Si igitur sint duo prismata
 æque alta, &c. Quod demonstrare oportebat.



EUCLIDIS

A B
 G N
 eff
 tur
 sim
 est
 BA
 duo
 BA
 uni
 tia,
 ang
 aut
 por
 ang
 gul
 qua
 aut
 lus
 BA
 lis.
 erg
 dem

EUCLIDIS ELEMENTORUM.

LIBER DUODECIMUS.

PROPOSITIO I. THEOREMA.

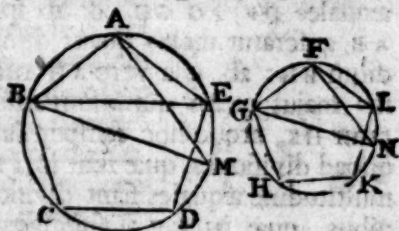
Similia polygona circulis inscripta inter se sunt
ut diametrorum quadrata.

Sint circuli $ABCDEFGHKL$, & in ipsis similia polygona
 $ABCDEFGHKL$; diametri autem circulorum sint BM
 GN . dico ut quadratum ex BM ad quadratum ex GN , ita
esse $ABCDE$ polygonum ad polygonum $FGHKL$. jungan-
tur enim BE AM GL FN . & quoniam polygonum $ABCDE$
simile est polygono $FGHKL$; & BAE angulus angulo GFL
est æqualis: atque est ut

BA ad AE , ita GF ad FL .

duo igitur triacula sunt
 BAE GFL unum angulum
uni angulo æqualem habentia,
videlicet angulum BAE
angulo GFL , circa æquales
autem angulos latera pro-

portionalia, quare triangulum ABE triangulo FGL æqui-
angulum est; ac propterea angulus AEB æqualis est an-
gulo FLG . sed angulus quidem AEB angulo AMB est æ-
qualis; in eadem enim circumferentia consistunt. angulus
autem ELG æqualis est angulo FNG . ergo & AMB angu-
lus est æqualis angulo FNG . est autem & rectus angulus
 BAM æqualis recto GFN . quare & reliquis reliquo æqua-
lis. æquiangulum igitur est triangulum AMB triangulo FGN .
ergo ut BM ad GN ita BA ad GF . sed proportionis qui-
dem BM ad GN duplicata est proportio quadrati ex BM ad



N 3

quadratum

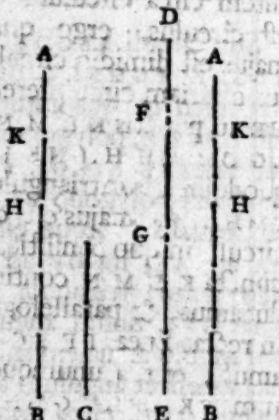
6 sexti.
21. tertii.
31. tertii.
4. sexti.

420 sexti quadratum ex GN ; proportionis vero BA ad GF duplicata est proportio $ABCDE$ polygoni ad polygonum $FGHKL$: & ut igitur quadratum ex BM ad quadratum ex GN , ita polygonum $ABCDE$ ad $FGHKL$ polygonum. Quare similia polygona quæ in circulis describuntur, inter se sunt ut diametrorum quadrata. Quod demonstrare oportebat

LEMMA.

Duabus magnitudinibus inæqualibus expositis, si à majori auferatur majus quàm dimidium, & ab eo quod reliquum est, rursus auferatur majus quàm dimidium; & hoc semper fiat: relinquetur tandem quædam magnitudo quæ minori magnitudine exposita minor erit.

Sint duæ magnitudines inæquales AB C , quarum major AB . dico si ab ipsa AB auferatur majus quàm dimidium, & ab eo quod reliquum est, rursus auferatur majus quàm dimidium, atque hoc semper fiat, relinqui tandem magnitudinem quandam, quæ magnitudine C minor erit. etenim C multiplicata, fiet aliquando major magnitudine AB . multiplicetur, & sit DE ipsius quidem C multiplex, major autem quam AB , dividaturque DE in partes ipsi C æquales DF FG GE . & ab ipsa AB auferatur majus quàm dimidium BH : ab ipsa vero AH rursus majus quàm dimidium auferatur HK , atque hoc semper fiat, quoad divisiones, quæ sunt in AB , multitudinē æquales fiant divisionibus quæ in DE : sint igitur divisiones AK KH HA , divisionibus DF FG GE multitudinē æquales, & quoniam major est DE quàm AB ; & ablatum est ab ipsa quidem DE minus quàm dimidium EG ; ab ipsa vero AB majus quàm dimidium BH ; erit reliquum GD reliquo HA majus. rursus quoniam major est GD , quàm HA , & ablatum est ab ipsa quidem GD dimidium GE ; ab ipsa vero HA majus quàm dimidium HK ; reliquum FD reliquo AK majus erit, estque FD æqualis ipsi C . ergo C quàm AK est major, minor igitur est AK quàm C . ergo ex magnitudine AB relicta est magnitudo AK , exposita minori magnitudine

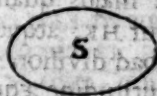


rudine q minor. Quod demonstrare oportebat. Similiter autem demonstrabitur etiam si dimidia ablata fuerint. *Et prima decimi.*

PROP. II. THEOR.

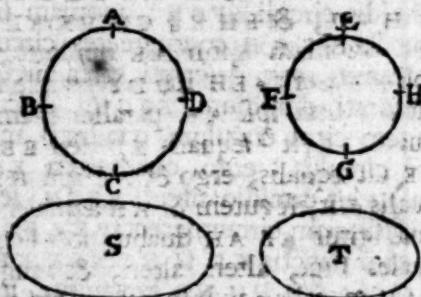
Circuli inter se sunt ut diametrorum quadrata.

Sint circuli $ABCD EFGH$, diametri autem ipsorum sint $BD FH$. dico ut quadratum ex BD ad quadratum ex FH , ita esse circulum $ABCD$ ad $EFGH$ circulum. Si enim non ita sit; erit ut quadratum ex BD ad quadratum ex FH , ita circulus $ABCD$ vel ad spatium aliquod minus circulo $EFGH$, vel ad majus. sit primum ad minus quod sit s : & in circulo $EFGH$ describatur quadratum $EFGH$. itaque descriptum in circulo quadratum majus est dimidio circuli $EFGH$; quoniam si per puncta $EFGH$ contingentes circulum ducamus, erit descripti circa circulum quadrati dimidium $EFGH$. descripto autem circa circulum quadrato minor est circulus. ergo quadratum $EFGH$ majus est dimidio circuli $EFGH$. secantur bifariam circumferentiæ $EF FG GH HE$ in punctis $KLMN$: & $EK KF FL LG GM MH HN NE$ jungantur. unum quodque igitur triangulorum $EKF FLG GMH HNE$ majus est dimidio segmenti circuli in quo consistit, quoniam si per puncta $KLMN$ contingentes circulum ducamus, & parallelogramma, quæ sunt in rectas lineas $EF FG GH HE$ compleamus; erit a unumquodque triangulorum $EKF FLG GMH HNE$ dimidium parallelogrammi, quod ad ipsum est: sed segmentum minus est parallelogrammo. quare unumquodque triangulorum $EKF FLG GMH HNE$ majus est dimidio segmenti circuli, in quo consistit. reliquas igitur circumferentias bifariam secantes, & jungentes rectas lineas, atque hoc semper facientes, relinquemus tandem quædam circuli segmenta, quæ minora erunt excessu, quo circulus $EFGH$ ipsum s spatium superat. etenim ostensum est in præcedenti Lemmate, duabus magnitudinibus inæqualibus expositis, si à majori auferatur majus quam dimidium, & ab eo quod relinquitur, rursus majus quam dimidium,



41. primi.

dium, & hoc semper fiat; relinqui tandem magnitudinem aliquam, quæ minori magnitudine exposita sit minor. itaque relicta sint segmenta circuli EFGH in rectas lineas EK FL LG GM MH HN NE, quæ minora sint excessu, quo circulus EFGH ipsum s spatium superat. ergo reliquum EKFLGMHN polygonum majus erit spatio s. Describatur etiam in circulo ABCD, polygono EKFLGMHN simile polygonum AXBOCPDR. est igitur ut quadratum ex BD ad quadratum ex FH, & ita polygonum AXBOCPDR ad EKFLGMHN polygonum. sed & ut quadratum ex BD ad quadratum ex FH, ita ABCD circulus ad spatium s. ergo & ut circulus ABCD ad spatium s, ita polygonum AXBOCPDR ad EKFLGMHN polygonum; major autem est circulus ABCD eo quod in ipso est polygono, quare & spatium s majus est polygono EKFLGMHN. sed & minus, quod fieri non potest. Non igitur est ut quadratum ex BD ad quadratum ex FH, ita ABCD circulus ad spatium aliquod minus circulo EFGH. Similiter ostendemus neque esse ut quadratum ex FH ad quadratum ex BD, ita circulum EFGH ad aliquod spatium minus circulo ABCD. dico igitur neque esse ut quadratum ex BD ad quadratum FH, ita circulum ABCD ad aliquod spatium majus circulo EFGH, si enim fieri potest, sit ad majus spatium s. erit igitur invertendo ut quadratum ex FH ad quadratum ex BD, ita spatium s ad ABCD circulum; sed quoniam s majus est EFGH circulo; erit ut spatium s ad ABCD circulum, ita circulus EFGH ad aliquod spatium minus circulo ABCD. ergo & ut quadratum ex FH ad quadratum ex BD, ita EFGH circulus ad aliquod spatium minus, circulo ABCD, quod fieri non posse ostensum est. non igitur ut quadratum ex BD ad quadratum ex FH, ita est circulus ABCD ad spatium aliquod majus EFGH circulo. ostensum autem est neque ad minus. quare ut quadratum ex BD ad quadratum ex FH, ita erit ABCD circulus ad circulum EFGH. Circuli igitur inter se sunt ut diametrorum quadrata. Quod ostendere oportebat.

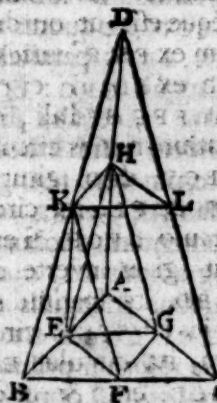


PROP.

PROP. III. THEOR.

Omnis pyramis triangularem habens basim dividitur in duas pyramides, æquales & similes inter se, quæ triangulares bases habent, similesque toti, & in duo prismata æqualia, quæ quidem prismata dimidio totius pyramidis sunt maiora.

Sit pyramis, cujus basis quidem ABC triangulum; vertex autem punctum D . dico pyramidem $ABCD$ dividi in duas pyramides æquales & similes inter se, triangulares bases habentes, & similes toti, & in duo prismata æqualia; & duo prismata dimidio totius pyramidis esse maiora. secetur enim $ABBCA$ $ADDBDC$ bifariam in punctis E F G H K L , & EH EG GH HK KL LH EK KF FG jungantur. quoniam igitur AE quidem est æqualis EB , AH vero ipsi HD ; erit EH ipsi DB parallela. eadem ratione & HK est parallela ipsi AB . parallelogrammum igitur est $HEBK$. quare HK est æqualis EB . sed EB ipsi AE est æqualis, ergo & AE ipsi HK æqualis erit; est autem & AH æqualis HD . duæ igitur AE AH duabus KH HD æquales sunt, altera alteri, & angulus EAH æqualis angulo KHD ; basis igitur EH basi KD est æqualis; quare triangulum AEH æquale est & simile triangulo HKD . eadem ratione & triangulum AHG triangulo HLD æquale est & simile. & quoniam duæ rectæ lineæ sese tangentes EH HG duabus rectis lineis sese tangentibus KD DL parallelæ sunt, non autem in eodem plano, æquales angulos continebunt. ergo angulus EHG est æqualis angulo KDL . rursus quoniam duæ rectæ lineæ EH HG duabus KD DL æquales sunt, altera alteri, & angulus EHG est æqualis angulo KDL ; erit & basis EG basi KL æqualis; æquale igitur est & simile triangulum EHG triangulo KDL . eadem ratione & AEG triangulum est æquale & simile triangulo HKL . quare pyramis cujus basis quidem est AEG triangulum, vertex autem punctum H , æqualis & similis est pyramidi cujus basis est triangulum HKL , & vertex D punctum. & quoniam uni laterum trianguli ADB , videlicet ipsi AB , parallela ducta est HK ; erit triangulum ADB triangulo DKH æqui-



e 19. primi.

d 4. primi.

e 10. undecimi.

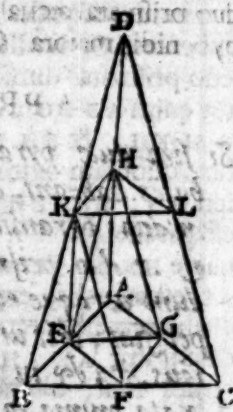
angulum,

e 10. undecimi.

g 40. undecimi.

f 10. diffin. undecimi.

angulum; & latera habent proportionalia. simile igitur est ADB triangulum triangulo $DH\epsilon$; & eadem ratione triangulum quidem DBC simile est triangulo DKL ; triangulum vero ADC triangulo DHL . & cum duæ rectæ lineæ sese tangentes BA AC duabus rectis lineis sese tangentibus KH HL parallelæ sint, non existentes in eodem plano, hæ æquales angulos continebunt. angulus igitur BAC angulo KHL est æqualis: atque est ut BA ad AC , ita KH ad HL , ergo ABC triangulum simile est triangulo HKL ; ideoque pyramis, cujus basis quidem triangulum ABC , vertex autem punctum D , similis est pyramidi, cujus basis triangulum HKL , & vertex punctum D . sed pyramis cujus basis quidem HKL triangulum, vertex autem punctum D , ostensa est similis pyramidi, cujus basis triangulum AEG , & vertex H punctum. quare & pyramis cujus basis triangulum ABC & vertex punctum D , similis est pyramidi cujus basis AEG triangulum, & vertex punctum H . utraque igitur ipsarum $AEGH$ $HKLD$ pyramidum similis est toti pyramidi $ABCD$. & quoniam BF est æqualis FC , erit $EBFG$ parallelogrammum duplum trianguli GFC : & quoniam duo prismata æque alta sunt, quorum unum quidem basim habet parallelogrammum, alterum vero triangulum, estque parallelogrammum duplum trianguli; erunt ea prismata inter se æqualia. ergo prisma contentum duobus triangulis BKF EHG , & tribus parallelogrammis $EBFG$ $EBKH$ $KHGF$, est æquale prismati quod duobus triangulis GFC HKL , & tribus parallelogrammis $KFCL$ $LCGH$ $HKFG$ continetur. & manifestum est utrumque ipsorum prismatum, & cujus basis est $EBGF$ parallelogrammum, opposita autem ipsi HK recta linea, & cujus basis est GFC triangulum, & oppositum ipsi triangulum KLH , majus esse utraque pyramidum quarum bases quidem AEG HKL trianguula, vertices autem puncta H D ; quoniam si jungamus EF EH rectas lineas, prisma quidem, cujus basis est $EBFG$ parallelogrammum, & opposita ipsi recta linea HK , majus est pyramide cujus basis EBF triangulum, vertex autem punctum K ; sed pyramis, cujus basis triangulum EBF , & vertex K punctum, est æqualis pyramidi cujus basis AEG triangulum, & vertex punctum H ; æqualibus enim & similibus planis continentur. quare & prisma cujus basis parallelogrammum $EBFG$, opposita autem



ip
tr
pa
en
po
lu
cu
du
et
au
an
ran
du
py

S

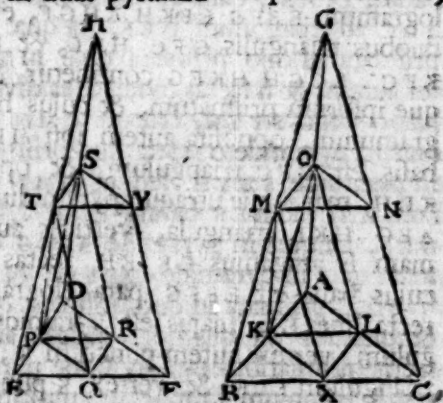
S
hab
vid
fimi
duo
& f
dum
mod
tur
fiat
fis a
esse
quæ
ABC
maia
mide
dine
AL
gulu

ipſi recta linea HK, majus eſt pyramide cujus baſis AEG triangulum, & vertex punctum H. priſma vero cujus baſis parallelogrammum EBF G, & oppoſita ipſi recta linea HK, eſt æquale priſmati cujus baſis GFC triangulum, & ipſi oppoſitum triangulum HKL: & pyramis cujus baſis triangulum AEG, vertex autem H punctum, eſt æqualis pyramidi cujus baſis HKL triangulum, & vertex punctum D. ergo duo priſmata de quibus dictum eſt, ſunt majora duabus dictis pyramidibus quorum baſes trianguſa AEG HKL, vertices autem H D puncta. Tota igitur pyramis cujus baſis ABC triangulum, vertex autem punctum D, diviſa eſt in duas pyramides æquales, & ſimiles inter ſe, & ſimiles toti: & in duo priſmata æqualia: ſuntque duo priſmata dimidio totius pyramidis majora. Quæ oſtendere oportebat.

PROP. IV. THEOR.

Si ſint duæ pyramides æque altæ, quæ triangulares baſes habeant, dividatur autem utraque ipſarum, & in duas pyramides æquales inter ſe, ſimilesque toti, & in duo priſmata æqualia, & factarum pyramidum utraque eodem modo dividatur, atque hoc ſemper fiat; erit ut unius pyramidis baſis ad baſim alterius, ita & in una pyramide priſmata omnia ad priſmata omnia in altera pyramide multitudine æqualia.

Sint duæ pyramides æque altæ quæ triangulares baſes habeant ABC DEF, vertices autem ſint puncta G H, & dividatur utraque ipſarum in duas pyramides æquales inter ſe, ſimilesque toti, & in duo priſmata æqualia, & factarum pyramidum utraque eodem modo diviſa intelligatur: atque hoc ſemper fiat. dico ut ABC baſis ad baſim DEF, ita eſſe priſmata omnia quæ ſunt in pyramide ABCG ad priſmata omnia quæ in pyramide DEFH multitudine æqualia. Quoniam enim BX quidem eſt æqualis XC, AL vero æqualis LC; erit XL ipſi AB parallela, & triangulum ABC triangulo LXC ſimile. eadem ratione & triangulum



¶ 1. ſexti.

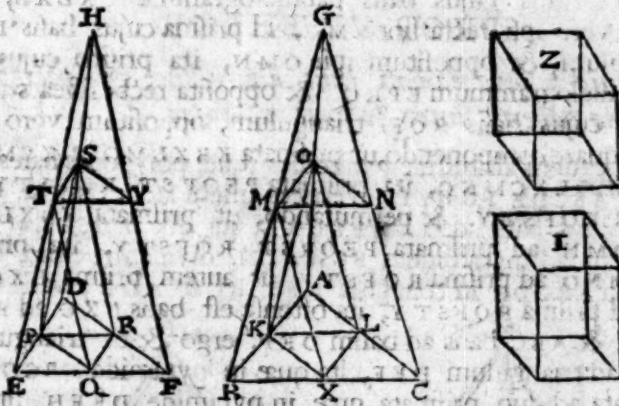
gulum DEF simile est triangulo RQF. & quoniam BC quidem est dupla CX, EF vero dupla ipsius FQ, ut BC ad CX, ita erit EF ad FQ, & descripta sunt ab ipsis BC CX similia & similiter posita rectilinea ABC LXC; ab ipsis vero EFFQ similia & similiter posita rectilinea DEF RQF. est igitur ut BAC triangulum ad triangulum LXC, ita triangulum DEF ad RQF triangulum; & permutando ut triangulum ABC ad triangulum DEF, ita LXC triangulum ad triangulum RQF. sed ut LXC triangulum ad triangulum RQF, ita prisma cuius basis est triangulum LXC, oppositum autem ipsi OMN, ad prisma cuius basis RQF triangulum & oppositum ipsi STY. ut igitur ABC triangulum ad triangulum DEF, ita prisma cuius basis est triangulum LXC, oppositum autem ipsi OMN, ad prisma cuius basis RQF triangulum, & oppositum ipsi STY. & quoniam duo prismata quæ in pyramide ABCG inter se æqualia sunt, sed & quæ in pyramide DEFH prismata inter se sunt æqualia; erit ut prisma cuius basis parallelogrammum KLXB, opposita vero ipsi recta linea MO, ad prisma cuius basis LXC triangulum, & oppositum ipsi OMN, ita prisma cuius basis parallelogrammum EPRQ, & opposita recta linea ST, ad prisma cuius basis RQF triangulum, oppositum vero ipsi STY. quare componendo, ut prismata KBXLMO LXCMNO ad prisma LXCMNO, ita prismata PEQRST RQFSTY ad prisma RQFSTY. & permutando, ut prismata KBXLMO LXCMNO ad prismata PEQRST RQFSTY, ita prisma LXCMNO ad prisma RQFSTY. ut autem prisma LXCMNO ad prisma RQFSTY, ita ostensa est basis LXC ad RQF basim, & ABC basis ad basim DEF. ergo & ut triangulum ABC ad triangulum DEF, ita quæ in pyramide ABCG duo prismata ad duo prismata quæ in pyramide DEFH. similiter autem, & si factas pyramides dividamus eodem modo velut OMNG STYH, erit ut OMN basis ad basim STY, ita quæ in pyramide OMNG duo prismata ad duo prismata quæ in pyramide STYH. sed ut OMN basis ad basim STY, ita basis ABC ad DEF basim. & ut igitur ABC basis ad basim DEF, ita quæ in pyramide ABCG duo prismata ad duo prismata quæ in pyramide DEFH; & quæ in pyramide OMNG duo prismata ad duo prismata quæ in pyramide STYH, & quatuor ad quatuor. eadem autem ostendentur & in factis prismatibus ex divisione pyramidum AKLO, & DE RS & omnium simpliciter multitudine æqualium. Quod demonstrare oportebat.

PROP.

PROP. V. THEOR.

Pyramides quæ eadem sunt altitudine, & triangulares bases habent, inter se sunt ut bases.

Sint eadem altitudine pyramides quarum bases quidem triangula ABC DEF , vertices autem puncta G H . dico ut ABC basis ad basim DEF , sic esse pyramidem $ABCG$ ad $DEFH$ pyramidem. Si enim non ita fit, erit ut AEC basis ad basim DEF , sic $ABCG$ pyramis, vel ad solidum minus pyramide $DEFH$, vel ad majus. fit primum ad solidum minus, fitque Z : & dividatur pyramis $DEFH$ in duas pyramides æquales inter se, & similes toti, & in duo prismata æqualia: sunt duo igitur prismata dimidio totius pyramidis majora. & rursus pyramides ex divisione factæ similiter dividantur, atque hoc semper fiat, quoad sumantur quædam pyramides à pyramide $DEFH$, quæ sint minores excessu quo pyramis $DEFH$ solidum Z superat. itaque sumantur, &



sint exempli causa, pyramides $DPRS$ $STYH$. erunt igitur reliqua in pyramide $DEFH$ prismata solido Z majora. dividatur etiam $ABCG$ pyramis in totidem partes similes pyramidi $DEFH$. ergo ut ABC basis ad basim DEF , ita quæ 4 hujus. in pyramide $ABCG$ prismata ad prismata quæ in pyramide $DEFH$; sed ut ABC basis ad basim DEF , ita pyramis $ABCG$ ad solidum Z , & igitur ut $ABCG$ pyramis ad solidum Z , ita quæ in pyramide $ABCG$ prismata ad prismata quæ in pyramide $DEFH$: major autem est pyramis $ABCG$ prismatibus quæ in ipsa sunt, ergo & solidum Z prismatibus, quæ sunt in pyramide $DEFH$ est majus. sed & minus, quod fieri non potest. non igitur ut AEC basis ad basim DEF , ita est pyramis $ABCG$ ad solidum aliquod minus pyramide $DEFH$. similiter ostendemus neque ut DEF basis ad basim

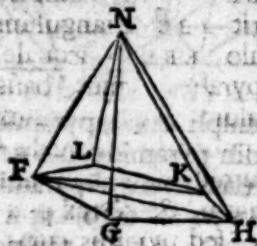
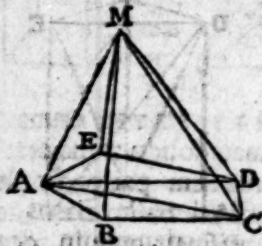
*ex prius
demon-
stratis.*

basim ABC , ita esse pyramidem $DEFH$ ad solidum aliquod pyramide $ABCG$ minus. dico igitur neque esse ut ABC basis ad basim DEF , ita $ABCG$ pyramidem ad aliquod solidum majus pyramide $DEFH$. si enim fieri potest, sit ad majus, videlicet ad solidum I . erit igitur invertendo ut DEF basis ad basim ABC , ita solidum I ad $ABCG$ pyramidem. cum autem solidum I majus est pyramide $EDFH$, erit ut solidum I ad $ABCG$ pyramidem, ita $DEFH$ pyramis ad solidum aliquod minus pyramide $ABCG$, ut proxime ostensum fuit. & ut igitur DEF basis ad basim ABC , ita pyramis $DEFH$ ad solidum aliquod pyramide $ABCG$ minus, quod est absurdum. non igitur ut ABC basis ad basim DEF , ita est $ABCG$ pyramis ad solidum aliquod majus pyramide $DEFH$. ostensum autem est, neque ad minus. quare ut ABC basis ad basim DEF , ita est pyramis $ABCG$ ad $DEFH$ pyramidem. Pyramides igitur quæ eadem sunt altitudine, & triangulares bases habent, inter se sunt ut bases. Quod demonstrare oportebat.

PROP. VI. THEOR.

Pyramides quæ eadem sunt altitudine, & polygonas bases habent, inter se sunt ut bases.

Sint eadem altitudine pyramides quæ polygonas bases habeant $ABCDE$ $FGHKL$: vertices autem M N puncta. dico ut $ABCDE$ basis ad basim $FGHKL$, ita esse $ABCEM$ pyramidem ad pyramidem $FGHKLN$. dividatur enim basis quidem $ABCDE$ in triacula ABC ACD ADE ; basis vero



$FGHKL$ dividatur in triacula FGH FHK FKL . & in uno quoque triangulo intelligantur pyramides æque altæ atque pyramides quæ à principio. quoniam igitur est ut triangulum ABC ad triangulum ACD , ita $ABCM$ pyramis ad pyramidem $ACDM$: & componendo ut $ABCD$ trapezium ad triangulum ACD , ita $ABCDM$ pyramis ad pyramidem $ACDM$. sed & ut ACD triangulum ad ADE , ita $ACDM$ ad $ADEM$ pyramidem. ergo ex æquali, ut $ABCD$ basis ad basim ADE , ita $ABCDM$ pyramis ad pyramidem $ADEM$: &

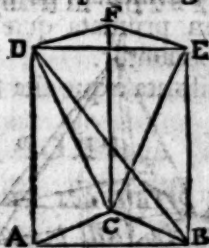
¶ 5. hujus.

& rursus componendo ut $ABCDE$ basis ad basim ADE , ita $ABCDEM$ pyramis ad pyramidem $ADEM$. eadem ratione & ut $FGHKL$ basis ad basim FKL , ita & $FGHKLN$ pyramis ad $FKLN$ pyramidem. & quoniam duæ pyramides sunt $ADEM$ $FKLN$, quæ triangulares bases habent, & eadem sunt altitudine; erit $\cdot$ ut ADE basis ad basim FKL , ita $ADEM$ pyramis ad pyramidem $FKLN$. quod cum sit ut $ABCDE$ basis ad basim ADE , ita $ABCDEM$ pyramis ad pyramidem $ADEM$; ut autem ADE basis ad basim FKL , ita $ADEM$ pyramis ad pyramidem $FKLN$; erit ex æquali, ut basis $ABCDE$ ad FKL basim, ita $ABCDEM$ pyramis ad pyramidem $FKLN$. sed & ut FKL basis ad basim $FGHKL$, ita erat & $FKLN$ pyramis ad pyramidem $FGHKLN$. quare rursus ex æquali, ut $ABCDE$ basis ad basim $FGHKL$, ita est $ABCDEM$ pyramis ad pyramidem $FGHKLN$. Pyramides igitur quæ eadem sunt altitudine, & polygonas bases habent, inter se sunt ut bases. Quod oportebat demonstrare.

PROP. VII. THEOR.

Omne prisma triangularem habens basim, dividitur in tres pyramides æquales inter se, quæ triangulares bases habent.

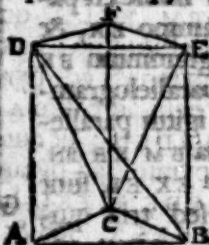
Sit prisma cuius basis quidem triangulum ABC , oppositum autem ipsi DEF . dico prisma $ABCDEF$ dividi in tres pyramides æquales inter se, quæ triangulares habent bases. Jungantur enim BD EC CD . & quoniam parallelogrammum est $ABED$ cuius diameter BD , erit ABD triangulum triangulo EBD $\cdot$ æquale. ergo pyramis cuius basis triangulum ABD , vertex autem punctum C , æqualis est pyramidi cuius basis EBD triangulum, & vertex punctum C . sed pyramis cuius basis EDB triangulum, & vertex punctum C , eadem est cum pyramide cuius basis triangulum EBD , & vertex D punctum: iisdem enim planis continentur. ergo & pyramis cuius basis triangulum ABD , vertex autem punctum C , æqualis est pyramidi cuius basis EBD triangulum, & vertex punctum D . rursus quoniam $FCBE$ parallelogrammum est cuius diameter CE , triangulum ECF triangulo CBE est æquale. ergo & pyramis cuius basis BEC triangulum, vertex autem punctum D , æqualis est $\cdot$ pyramidi cuius basis triangulum ECF , & vertex punctum D : sed pyramis cuius



¶ 34. primi.

¶ 6. hujus.

basis quidem BCE triangulum, vertex autem punctum D, ostensa est æqualis pyramidi cujus basis triangulum ABD, & vertex C punctum; quare & pyramis cujus basis triangulum CEF, & vertex punctum D, æqualis est pyramidi cujus basis triangulum ABD, & vertex C punctum. Prisma igitur ABCDEF dividitur in tres pyramides inter se æquales, quæ triangulares bases habent. & quoniam pyramis cujus basis ABD triangulum, vertex autem punctum C, eadem est cum pyramide, cujus basis triangulum CAB, & vertex D punctum, iisdem namque planis continentur: pyramis autem, cujus basis triangulum ABD, & vertex punctum C, tertia pars ostensa est prismatis cujus basis ABC triangulum, & oppositum ipsi DEF. & pyramis igitur, cujus basis triangulum ABC, vertex autem D punctum, tertia pars est prismatis eandem basim habentis, videlicet ABC triangulum & oppositum ipsi triangulum DEF. Quod demonstrare oportebat.



COROLLARIUM.

1. Ex hoc manifestum est omnem pyramidem tertiam partem esse prismatis basim habentis eandem, & altitudinem æqualem; quoniam si basis prismatis aliam quandam figuram rectilineam obtineat, & oppositam ipsi eandem, dividitur in prismata quæ triangulares bases habent, & quæ ipsis opponuntur.

2. Prismata æque alta sunt inter se ut bases.

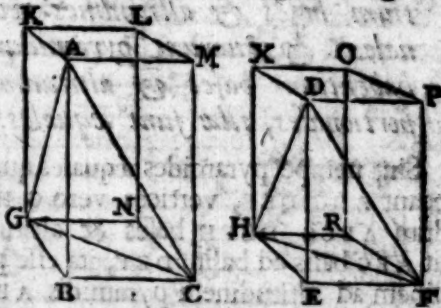
PROP. VIII. THEOR.

Similes pyramides quæ triangulares bases habent, in triplicata sunt proportionem homologorum laterum.

Sint similes, & similiter positæ pyramides, quarum bases quidem triangula ABC DEF, vertex autem G H puncta dico ABCG pyramidem ad pyramidem DEFH, triplicatam proportionem habere ejus quam BC habet ad EF. compleantur enim BGML EHPO solida parallelepipeda. & quoniam pyramis ABCG similis est pyramidi DEFH, erit angulus ABC angulo DEF æqualis, angulusque GBC æqualis angulo HEF, & angulus ABC angulo DEH. atque est ut AB ad DE, ita BC ad EF, & AG ad EH. quoniam igitur est ut

49 Diffin.
undecimi.
b 1. Diffin.
sexti.

ut AB ad DE , ita BC ad EF , & circum æquales angulos latera sunt proportionalia, parallelogrammum BM parallelogrammo EP simile erit. eadem ratione, & parallelogrammum BN simile est parallelogrammo ER , & parallelogrammum BK ipsi EX parallelogrammo. tria igitur parallelogramma BM KB BN tribus EP EX ER sunt similia. sed tria quidem MB BK BN tribus oppositis æqualia



& similia sunt, tria vero EP EX ER tribus oppositis æqualia & similia. quare solida $BGML$ $EHPO$ similibus planis & numero æqualibus continentur; ac propterea simile est $BGML$ solidum solidum $EHPO$. similia autem solida parallelepipeda in triplicata sunt proportionem homologorum laterum. ergo solidum $BGML$ ad solidum $EHPO$ triplicatam habet proportionem ejus quam habet latus homologum BC ad EF homologum latus. sed ut $BGML$ solidum ad solidum $EHPO$, ita $ABCG$ pyramis ad pyramidem $DEFH$; pyramis enim sexta pars est ipsius solidi, cum prisma quod est dimidium solidi parallelepipedi, sit pyramidis triplum. quare & pyramis $ABCG$ ad pyramidem $DEFH$ triplicatam proportionem habebit ejus quam BC habet ad EF . Quod demonstrare oportebat.

Cor. Ex hoc perspicuum est, & similes pyramides quæ multangulas bases habent, inter se esse in triplicata proportionem homologorum laterum. ipsis enim divis in pyramides triangulares bases habentes, quoniam & similia polygonæ, quæ sunt in basibus, in similia trianguia dividuntur, & numero æqualia & homologa totis; erit ut una pyramis in una pyramide triangularem habens basim ad pyramidem in altera triangularem basim habentem, ita & omnes pyramides in uno pyramide triangulares habentes bases ad omnes in altera triangulares bases habentes; hoc est ita pyramis ipsa multangulam habens basim ad pyramidem quæ multangulam basim habet. sed pyramis triangularem habens basim ad pyramidem quæ triangularem basim habet, est in triplicata proportionem homologorum laterum: & pyramis igitur polygonam habens basim ad pyramidem similem basim habentem, triplicatam proportionem habebit ejus quam latus homologum habet ad homologum latus.

O

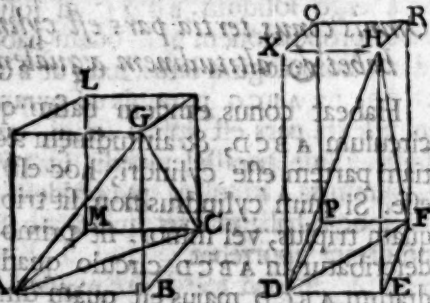
PROP.

PROPOSITION IX. THEOREMA.
Equalium pyramidum, & triangulares bases habentium bases & altitudines reciproce sunt proportionales: & quarum pyramidum triangulares bases habentium bases & altitudines reciproce sunt proportionales, illae sunt aequales.

Sint nempe pyramides aequales quae triangulares bases habeant ABC DEF , vertex vero G H puncta. dico pyramidum $ABCG$ $DEFH$ bases & altitudines reciprocari; scilicet ut ABC basis ad basim DEF , ita esse pyramidis $DEFH$ altitudinem ad altitudinem pyramidis $ABCG$. compleantur enim $BGML$ $EHPO$ solida parallelepipedum. & quoniam pyramis $ABCG$ est aequalis pyramidi $DEFH$, atque est pyramidis quidem $ABCG$ sextuplum $BGML$ solidum, pyramidis vero $DEFH$ sextuplum solidum $EHPO$; erit solidum $BGML$ solido $EHPO$ aequale. aequalium autem solidorum parallelepipedorum bases & altitudines reciprocantur.

¶ 15. quinti.

est igitur ut BM basis ad basim EP , ita $EHPO$ solidi altitudo ad altitudinem solidi $BGML$. sed ut BM basis ad basim EP , ita ABC triangulum ad triangulum DEF . ergo ABC basis ad basim DEF , ita $DEFH$ pyramidis altitudo ad altitudinem pyramidis $ABCG$. dico $ABCG$ pyramidem pyramidi $DEFH$ aequalem esse. iisdem enim constructis, quoniam ut ABC basis ad basim DEF , ita est $DEFH$ pyramidis altitudo ad altitudinem pyramidis $ABCG$; ut autem ABC basis ad basim DEF , ita BM parallelogrammum ad parallelogrammum EP ; erit & ut parallelogrammum BM ad EP parallelogrammum, ita pyramidis $DEFH$ altitudo ad altitudinem



¶ 34. undecimi.

nem pyramidis $ABCG$ sed pyramidis quidem $DEFH$ altitudo eadem est cum altitudine solidi parallelepipedum $EHPO$; pyramidis vero $ABCG$ altitudo eadem est cum altitudine solidi parallelepipedum $BGML$ est igitur ut BM basis ad basim EP , ita $EHPO$ solidi parallelepipedum altitudo ad altitudinem solidi parallelepipedum $BGML$ quorum autem solidorum parallelepipedorum bases & altitudines reciprocantur, ea sunt ^{634. unde-} æqualia. solidum igitur parallelepipedum $BGML$ æquale ^{decimi.} est solido parallelepipedo $EHPO$; atque est solidi quidem $BGML$ sexta pars pyramis $ABCG$; solidi vero $EHPO$ itidem sexta pars pyramis $DEFH$. ergo pyramis $ABCG$ pyramidi $DEFH$ est æqualis. Æqualium igitur pyramidum, & triangulares bases habentium bases & altitudines reciproce sunt proportionales: & quarum pyramidum triangulares bases habentium bases & altitudines reciproce sunt proportionales, illæ sunt æquales. Quod oportebat demonstrare.

PROP. X. THEOR.

Omnis conus tertia pars est cylindri, qui eandem basim habet & altitudinem æqualem.

Habeat conus eandem basim quam cylindrus, videlicet circulum $ABCD$, & altitudinem æqualem. dico conum tertiam partem esse cylindri, hoc est cylindrum coni triplum esse. Si enim cylindrus non sit triplus coni, vel maior erit quam triplus, vel minor. sit primo maior quam triplus, & describatur in $ABCD$ circulo quadratum $ABCD$ ergo quadratum $ABCD$ majus est quam dimidium $ABCD$ circuli & a quadrato $ABCD$ erigatur prisma æque altum cylindro, quod quidem prisma majus erit quam cylindri dimidium, quoniam si circa circulum $ABCD$ quadratum describatur erit inscriptum quadratum dimidium circumscripti: & sunt ab eisdem basibus erecta solida parallelepipeda æque alta, nimirum prismata ipsa, quare prismata inter se sunt ut bases, & prismata igitur erectum a quadrato $ABCD$ dimidium est prismatis erecti a quadrato quod circa circulum $ABCD$ describitur, atque est cylindrus minor prismate erecto a quadrato quod describitur circa circulum $ABCD$. prisma igitur erectum a quadrato $ABCD$ æque altum cylindro, dimidio cylindri est majus. secantur circumferentiæ $ABBCDDA$ bisariam in punctis $EFGH$, & AE EB BF FC CG GD DH



6 sequitur
ex 1. hujus.

HA jungantur. unumquodque igitur triangulorum AEB
BFC CGD DHA majus est dimidio portionis circuli ABCD,
in qua consistit. erigantur ab unoquoque triangulorum AEB
BFC CGD DHA prismata æque alta cylindro. ergo &
unumquodque erectorum prismatum majus est dimidio por-
tionis cylindri quæ ad ipsum est, quoniam si per puncta
E F G H parallele ipfis AB BC CD DA ducantur, & com-
pleantur in ipfis AB BC CD DA parallelogramma, à qui-
bus solida parallelepipeda æque alta cylindro erigantur:
erunt uniuscujusque erectorum dimidia prismata ea quæ
sunt in triangulis AEB BFC CGD DHA. & sunt cylindri
portiones erectis solidis parallelepipedis minores. ergo &
prismata quæ in triangulis AEB BFC CGD DHA majora
sunt dimidio portionum cylindri quæ ad ipsa sunt. itaque
reliquas circumferentias secantes bifariam, jungentesque re-
ctas lineas, & ab unoquoque triangulorum erigentes pris-
mata æque alta cylindro, &
hoc semper facientes tandem
relinquentur quædam portiones
cylindri quæ sint minores ex-
cessu quo cylindrus coni tri-
plum superat. relinquantur
jam; & sint AEB BFC CGD
CGD DHA. reliquum igitur
prisma, cujus basis quidem polygonum AEBFCGDH, al-
titudo autem eadem quæ cylindri, majus est quam triplum
coni. sed prisma cujus basis AEBFCGDH polygonum, &
altitudo eadem quæ cylindri, triplum est pyramidis, cujus
basis polygonum AEBFCGDH, vertex autem idem qui
coni, & pyramis igitur cujus basis polygonum AEBFCG-
DH, vertex autem idem qui coni, major est cono qui ba-
sim habet ABCD circulum. sed & minor (ab ipso enim com-
prehenditur) quod fieri non potest. non igitur cylindrus
major erit quam triplus coni. dico insuper neque cylindrum
minorem esse quam triplum coni. si enim fieri potest, sit
cylindrus minor quam triplus coni. erit invertendo conus
major quam tertia pars cylindri. describatur in ABCD circulo
quadratum ABCD, ergo quadratum ABCD majus est
quam dimidium ABCD circuli; & à quadrato ABCD eri-
gatur pyramis, verticem habens eundem quem conus. py-
ramis igitur erecta major est quam coni dimidium: quo-
niam, ut ante demonstravimus, si circa circulum quadratum
describatur, erit quadratum ABCD dimidium ejus quod
circa circulum descriptum est: & si à quadratis erigantur
solida parallelepipeda æque alta cono, quæ & prismata ap-
pellantur,



1. Cor. 7.
hujus.

pellantur, erit, quod à quadrato $ABCD$ erigitur dimidium
 ejus, quod erectum est à quadrato circa circulum descripto,
 etenim inter se sunt ut bases, quare & tertia partes ipsarum.
 pyramis igitur cujus basis quadratum $ABCD$, dimidia est
 ejus pyramidis quæ à quadrato circa circulum descripto
 erigitur. sed pyramis erecta à quadrato descripto circa cir-
 culum, major est cono, ipsum namque comprehendit. ergo
 pyramis cujus basis $ABCD$ quadratum, vertex autem idem
 qui coni, major est quam coni
 dimidium. secentur circumfe-
 rentiæ $ABBCDDA$ bifariam
 in punctis $EFGH$. & jungantur
 $AE EB BF FC CG GD DH$
 HA . & unumquodque igitur
 triangulorum $AEB BFC CGD$
 DHA majus est quam dimi-
 dium portionis circuli $ABCD$, in qua consistit. erigantur
 ab unoquoque triangulorum $AEB BFC CGD DHA$ pyra-
 mides verticem habentes eundem quem conus. ergo & una-
 quæque pyramidum eodem modo erectarum major est
 quam dimidium portionis coni quæ est ad ipsam. itaque
 reliquas circumferentias secantes bifariam, jungentesque
 rectas lineas, & ab unoquoque triangulorum erigentes
 pyramides verticem habentes eundem quem conus, &
 hoc semper facientes, relinuemus tandem quasdam coni
 portiones quæ minores erunt excessu quo conus tertiam
 cylindri partem superat. relinquantur, & sint quæ in ipsis AE
 $EB BF FC CG GD DH HA$; reliqua igitur pyramis cujus
 basis polygonum $AEBFCGDH$, & vertex idem qui coni, ma-
 jor est quam tertia cylindri pars. sed pyramis cujus basis
 polygonum $AEBFCDH$ vertex autem idem qui coni, tertia
 pars est prismatis cujus basis polygonum $AEBFCDH$, alti-
 tudo autem eadem quæ cylindri. prisma igitur cujus basis
 $AEBFCGH$ polygonum, & altitudo eadem quæ cylindri,
 majus est cylindro cujus basis est circulus $ABCD$. sed &
 minus (ab ipso enim comprehenditur) quod fieri non po-
 test. non igitur cylindrus minor est quam triplus coni. o-
 stensum autem est neque majorem esse quam triplum, ergo
 cylindrus coni triplus sit necesse est; ac propterea conus
 tertia pars cylindri. Omnis igitur conus tertia pars est cylindri,
 eandem quam ipse basim habentis, & altitudinem æqualem.
 Quod demonstrare oportebat.



PROP. XI. THEOR.

Coni & cylindri qui eandem habent altitudinem, inter se sunt ut bases.

Sint in eadem altitudine coni & cylindri, quorum bases circuli $ABCD$ $EFGH$, axes autem KL MN , & diametri basium AC EG . dico ut $ABCD$ circulus ad circulum $EFGH$, ita esse conum AL ad EN conum. Si enim non ita sit, erit ut $ABCD$ circulus ad circulum $EFGH$, ita conus AL ad aliquod solidum minus cono EN , vel ad majus; sit primo ad minus quod sit X ; & quo minus est solidum X cono EN , ei æquale sit I solidum. conus igitur EN ipsis solidis X I est æqualis. describatur in $EFGH$, circulo quadratum $EFGH$ quod majus est dimidio circuli. erigatur a quadrato $EFGH$ pyramis æque alta cono. pyramis igitur erecta major est coni dimidio, nam si circa circulum quadratum describamus, & ab ipso erigamus pyramidem æque altam cono; erit inscripta pyramis pyramidis circumscriptæ dimidium. etenim inter se sunt ut bases: conus autem circumscripta pyramide est minor. ergo pyramis cujus basis quadratum $EFGH$, vertex autem idem qui coni, major est coni dimidio. secantur circumferentiæ EF FG GH HE bifariam in punctis P R S O ; & OE EP PF FR RG GS SH jungantur. unumquodque igitur triangulorum HOE EPF FRG GSH majus est quam dimidium segmenti circuli, in quo consistit. erigatur ab unoquoque triangulorum HOE EPF FRG GSH pyramis æque alta cono; ergo & unaquæque erectarum pyramidum major est dimidio portionis coni, quæ est ad ipsam. itaque reliquas circumferentias secantes bifariam, & jungentes rectas lineas, & ab unoquoque triangulorum erigentes pyramides æque altas cono, atque hoc semper facientes, relinquentur tandem aliquas portiones coni, quæ solido I minores erunt. relinquantur, & sint quæ in ipsis HO OE EP PF FR RG GS

SH.

a 6. hujus.

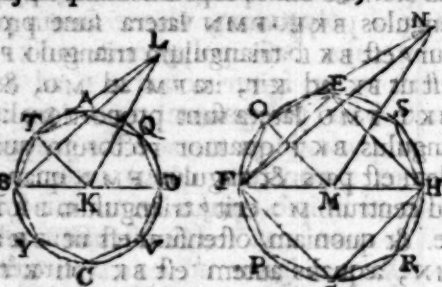


SH. reliqua igitur pyramis cuius basis polygonum HOEPFRGS, altitudo autem eadem quæ coni, major est solido x describatur in circulo ABCD polygono HOEPFRGS simile & similiter positum polygonum DTAYBQCV, & ab ipso erigatur pyramis æque alta cono AL quoniam igitur est ut quadratum ex AC ad quadratum ex EG, ita DTAY-^{a. 1. hujus.} BQCV polygonum ad polygonum HOEPFRGS; ut autem quadratum ex AC ad quadratum ex EG, ita ABCD circulus ad circulum EFGH erit ut ABCD circulus ad circulum EFGH, ita polygonum DTAYBQCV ad polygonum HOEPFRGS, sed ut ABCD circulus ad circulum EFGH, ita conus AL ad x solidum: & ut polygonum DTAYBQCV ad polygonum HOEPFRGS, ita pyramis cuius basis DTAYBQCV polygonum, vertex autem punctum L, ad pyramidem cuius basis polygonum HOEPFRGS, & vertex punctum N. ut igitur conus AL ad x solidum, ita pyramis, cuius basis polygonum DTAYBQCV, & vertex punctum L ad pyramidem cuius basis polygonum HOEPFRGS, & vertex punctum N. conus autem AL major est pyramide quæ est in ipso, majus igitur est solidum x pyramide quæ est in cono EN. sed & ostensum est minus, quod fieri non potest. non igitur ut ABCD circulus ad circulum EFGH, ita est AL conus ad solidum aliquod minus cono EN. similiter demonstrabitur neque ut EFGH circulus ad circulum ABCD, ita esse conum EN ad aliquod solidum minus cono AL. dico præterea neque esse ut ABCD circulus ad circulum EFGH, ita AL conum ad aliquod solidum majus cono EN. si enim fieri potest, sit ad solidum majus, quod sit Z. ergo invertendo ut EFGH circulus ad circulum ABCD, ita erit solidum Z ad AL conum; sed cum est solidum Z majus cono AL, erit ut solidum Z ad AL conum, ita conus EN ad aliquod solidum minus cono AL: & igitur ut EFGH circulus ad circulum ABCD, ita conus EN ad aliquod solidum minus cono AL, quod fieri non posse ostensum est. non igitur ut ABCD circulus ad circulum EFGH, ita conus AL ad aliquod solidum majus cono EN. ostensum autem est neque esse ad minus. ergo ut ABCD circulus ad circulum EFGH, ita est conus AL ad EN conum: sed ut conus ad conum, ita est cylindrus ad cylindrum, est enim uterque^{c. 15. quinti.} utriusque triplus. & igitur ut ABCD circulus ad circulum EFGH, ita in ipsis cylindri æque alti conis. Ergo coni & cylindri qui eandem habent altitudinem, inter se sunt ut bases. Quod demonstrare oportebat.

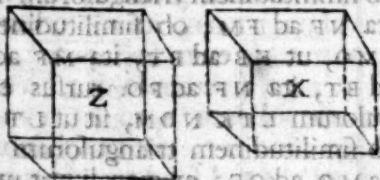
PROP. XII. THEOR.

Similes coni & cylindri inter se sunt in triplicata proportionem diametrorum quæ sunt in basibus.

Sint similes coni & cylindri quorum bases quidem circuli $ABCD$ $EFGH$, diametri vero basium BD FH , & axes conorum, vel cylindrorum KL MN . dico conum cujus basis $ABCD$ circulus, vertex autem punctum L , ad conum cujus basis circulus $EFGH$, vertex autem N punctum, triplicatam habere proportionem ejus quam habet BD ad FH . si enim non habet conus $ABCDL$ ad conum $EFGHN$ triplicatam proportionem ejus quam BD habet ad FH , habebit $ABCDL$ conus ad aliquod solidum minus cono $EFGHN$ triplicatam proportionem, vel ad majus. habeat primo ad minus, quod sit X ; & describatur in $EFGH$ circulo quadratum $EFGH$.



quadratum igitur $EFGH$ majus est dimidio $EFGH$ circuli, & erigatur à quadrato $EFGH$ pyramis æque alta cono, ergo erecta pyramis major est quam coni dimidium. itaque secantur EF FG GH HE circumferentie bifariam in punctis O P R S . & jungantur EO OF FP PG GR RH HS SE . unumquodque igitur triangulorum EOF FPG GRH HSE majus est dimidio segmenti circuli $EFGH$, in quo consistit. & erigatur ab unoquoque triangulorum EOF FPG GRH HSE pyramis eundem verticem habens quem conus. ergo & unaquæque erectarum pyramidum major est quam dimidium portionis coni, quæ est ad ipsam, secantes igitur reliquas circumferentias bifariam, jungentesque rectas lineas, & ab unoquoque triangulorum erigentes pyramides eundem habentes verticem quem conus, atque hoc semper facientes, tandem relinuemus quasdam coni portiones quæ minores erunt excessu quo conus $EFGHN$ ipsum X solidum superat relinquantur, & sint quæ in ipsis EO OF FP PG GR RH HS s. reliqua igitur pyramis cujus basis quidem polygonum



K O F F

EOFPGRHS, vertex autem N punctum, major est solido X.
 describatur etiam in circulo ABCD, polygono EOFPGRHS
 simile & similiter positum polygonum ATBYCVDQ, a quo
 erigatur pyramis eundem verticem habens, quem conus, &
 triangulorum continentium pyramidem cujus basis quidem
 est polygonum ATBYCVDQ, vertex autem punctum L,
 unum sit LBT, triangulorum vero continentium pyrami-
 dem cujus basis EOFPGRHS polygonum, & vertex pun-
 ctum N, unum sit NFO, & jungantur KT MO. quoniam igitur
 conus ABCDL similis est cono EFGHN, erit ut BD ad FH,
 ita KL axis ad axem MN, ut autem BD ad FH, ita BK ad ^{15. quinti.} FM,
 & KL ad MN, & permutando ut BK ad KL, ita FM
 ad MN. & cum perpendicularis utraque est, & circa æquales
 angulos BKL FMN latera sunt proportionalia, simile igitur
 est BKL triangulum triangulo FMN. Rursus quoniam ^{6. sexti.}
 est ut BK ad KT, ita FM ad MO, & circa æquales angulos
 BKT FMO latera sunt proportionalia; etenim quæ pars est
 angulus BKT quatuor rectorum qui sunt ad K centrum, ea-
 dem est pars & angulus FMO quatuor rectorum qui sunt
 ad centrum M: erit triangulum BKT triangulo FMO simili-
 le. & quoniam ostensum est ut BK ad KL, ita esse FM ad
 MN; æqualis autem est BK ipsi KT, & FM ipsi MO: erit
 ut TK ad KL, ita OM ad MN: & circa æquales angulos
 TKL OMN latera sunt proportionalia; recti enim sunt tri-
 angulum igitur LKT simile est triangulo NMO. quod cum
 ob similitudinem triangulorum BKL FMN, sit ut LB ad BK,
 ita NF ad FM; ob similitudinem vero triangulorum BKT
 FMO, ut KB ad BT, ita MF ad FO: erit ex æquali ut LB
 ad BT, ita NF ad FO. rursus cum ob similitudinem trian-
 gulorum LTK NOM, sit ut LT ad TK, ita NO ad OM; &
 ob similitudinem triangulorum KBT OMF, ut KT ad TB,
 ita MO ad OF: ex æquali erit ut LT ad TB, ita NO ad OF.
 ostensum autem est & ut TB ad BL, ita OF ad FN. quare
 rursus ex æquali ut TL ad LB, ita ON ad NF. triangulo-
 rum igitur LTB NOF proportionalia sunt latera, ideoque
 æquiangula sunt LTB NOF triangu-
 la, & inter se similia, quare & pyramis cujus basis triangulum BKT, vertex au-
 tem L punctum, similis est pyramidi cujus basis FMO tri-
 angulum, & vertex punctum N; similibus enim planis con-
 tinentur, & multitudine æqualibus pyramides autem simi-
 les, & quæ triangulares bases habent, in triplicata sunt pro-
 portione homologorum laterum. ergo pyramis BKTL ad
 pyramidem FMON triplicatam habet proportionem ejus-
 quam BK habet ad FM. similiter a punctis quidem A Q D V
 c T ad R, a punctis vero B S H R C P ad M ducentes rectas
 lineas

lineas, & à triangulis erigentes pyramides vertices eodẽm habentes quos coni, ostendemus & unamquamque pyramidum ejusdem ordinis ad unamquamque alterius ordinis triplicatam proportionem habere ejus quam habet BK latus ad homologum latus MF, hoc est quam BD ad FH. sed ut unum antecedentium ad unum consequentium, ita omnia antecedentia ad omnia consequentia. est igitur & ut BK TL pyramis ad pyramidem FMON, ita tota pyramis cujus basis ATBYCVDQ polygonum, vertex autem punctum L, ad totam pyramidem cujus basis polygonum EOPGRHS, & vertex punctum N. quare & pyramis cujus basis ATBYCVDQ polygonum vertex autem punctum L, ad pyramidem cujus basis polygonum EOPGRHS, & vertex punctum N, triplicatam proportionem habet ejus quam BD habet ad FH. ponitur autem conus cujus basis circulus ABCD vertex autem punctum L, ad solidum x triplicatam proportionem habere ejus quam BD ad FH. ut igitur conus cujus basis circulus ABCD, vertex autem punctum L, ad solidum x, ita est pyramis cujus basis ATBYCVDQ polygonum, vertex autem punctum L, ad pyramidem cujus basis polygonum EOPGRHS, & vertex punctum N. dictus autem conus major est pyramide quæ in ipso; etenim eam comprehendit: majus igitur est & solidum x pyramide cujus basis polygonum EOPGRHS, vertex autem punctum N. sed & minus, quod fieri non potest. non igitur conus cujus basis ABCD circulus, & vertex punctum L, ad aliquod solidum minus cono cujus basis circulus EFGH, & vertex N punctum, triplicatam proportionem habet ejus quam BD habet ad FH. similiter demonstrabimus neque conum EFGHN ad aliquod solidum minus cono ABCDL triplicatam proportionem habere ejus quam habet FH ad BD. itaque dico neque ABCDL conum ad solidum majus cono EFGHN triplicatam habere proportionem ejus quam BD habet ad FH. si enim fieri potest, habeat ad aliquod solidum majus, quod sit Z. invertendo

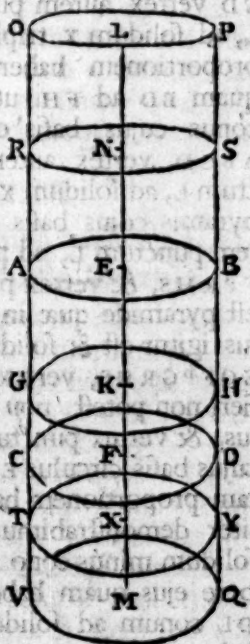


vertendo igitur, solidum Z ad conum $ABCDL$ triplicatam proportionem habet ejus quam FH ad BD : cum autem est solidum Z majus cono $EFGHN$; erit ut solidum Z ad conum $ABCDL$, ita $EFGHN$ conus ad aliquod solidum minus cono $ABCDL$. ergo & conus $EFGHN$ ad solidum aliquod minus cono $ABCDL$ triplicatam proportionem habebit ejus quam FH habet ad BD , quod fieri non posse demonstratum est. non igitur $ABCDL$ conus ad solidum aliquod majus cono $EFGHN$, triplicatam proportionem habet ejus quam BD ad FH , ostensum autem est neque ad minus. quare conus $ABCDL$ ad $EFGHN$ conum triplicatam proportionem habet ejus quam BD ad FH . ut autem conus ad conum, ita $cy-$ 15. quinci. lindrus ad cylindrum. cylindrus enim in eadem existens basi in qua conus, & ipsi æque altus, conus f triplus est. cum f 10. hujus. ostensum sit omnem conum tertiam partem esse cylindri eandem quam ipse basim habentis, & æqualem altitudinem. ergo & cylindrus ad cylindrum triplicatam proportionem habebit ejus quam BD habet ad FH . Similes igitur conis & cylindri inter se sunt in triplicata proportionem diametrorum quæ sunt in basibus. Quod demonstrare oportebat.

PROP. XIII. THEOR.

Si cylindrus plano secetur oppositis planis parallelo, erit ut cylindrus ad cylindrum, ita axis ad axem.

Cylindrus enim AD plano GH secetur oppositis planis AB CD parallelo, & occurrat axi EF in K puncto. dico ut BG cylindrus ad cylindrum CD , ita esse EK axem ad axem KF . producat enim EF axis ex utraque parte ad puncta L M : & ipsi quidem EK axi ponantur æquales quotcunque EN NL ; ipsi vero FK æquales quotcunque FX XM : & per puncta L N X M ducantur plana ipsis AB CD parallela, atque in planis per L N X M circa centra L N X M intelligantur circuli $OPRSTYVQ$ æquales ipsis AB CD ; & cylindri $PRRB$ $DTTQ$ intelligantur. quoniam igitur axes LN NE EK inter se sunt æquales, erunt cylindri $PRRB$ BG inter se ut bases; æquales autem sunt bases; ergo & cylindri $PRRB$ BG sunt æquales. quod cum axes LN NE EK inter



4-11. hujus.

se

se æquales sunt, itemque cylindri PR RB BG inter se æquales; sitque ipsorum LN NE EK multitudo æqualis multitudini ipsorum PR RB BG : quotuplex est axis KL ipsius EK axis, totuplex erit & PG cylindrus cylindri GB : eadem ratione & quotuplex est MK axis ipsius axis KF , totuplex est & QG cylindrus cylindri GD : & si quidem axis LK sit æqualis axi KM , erit & PG cylindrus cylindro GQ æqualis; si autem axis LK major sit axe KM , & cylindrus PG major erit cylindro GQ ; & si minor minor. quatuor igitur existentibus magnitudinibus, videlicet axibus EK KF , & cylindris BG GD , sumpta sunt æque multiplicia, axis quidem EK , & BG cylindri, nempe axis KL , & cylindrus PG ; axis vero KF , & cylindri GD æque multiplicia, axis scilicet KM , & GQ cylindrus, & demonstratum est si LK axis superat axem KM & PG cylindrum superare cylindrum GQ ; & si æqualis æqualis; & si minor minor. est igitur axis EK ad axem KF , ut BG cylindrus ad cylindrum GD . Quare si cylindrus plano secetur oppositis planis parallelo, erit ut cylindrus ad cylindrum, ita axis ad axem. Quod demonstrare oportebat.

6. Diffin.
quinti.

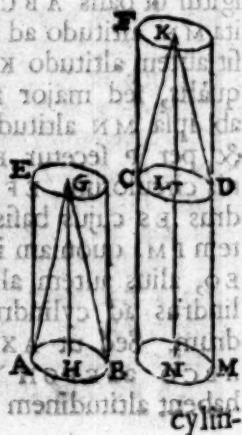
PROP. XIV. THEOR.

In æqualibus basibus existentes coni & cylindri, inter se sunt ut altitudines.

Sint enim in æqualibus basibus AB CD , cylindri EB FD . dico ut EB cylindrus ad cylindrum FD , ita esse GH axem ad axem KL . Producatur enim KL axis ad punctum N ; ponaturque ipsi GH axi æqualis LN ; & circa axem LN intelligatur cylindrus CM . quoniam igitur cylindri EB CM eandem habent altitudinem, inter se sunt ut bases: bases autem sunt æquales. ergo & cylindri EB CM inter se æquales erunt. & quoniam cylindrus FM secatur plano CD , oppositis planis parallelo, erit ut CM

11. hujus.

13. hujus.



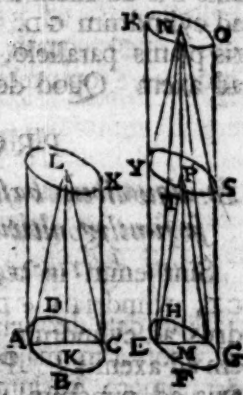
cylindrus ad cylindrum FD , ita axis LN ad KL axem. æqualis autem est cylindrus quidem CM cylindro EB ; axis vero LN axi GH . est igitur ut EB cylindrus ad cylindrum FD , ita axis GH ad KL axem: ut autem EB cylindrus ad cylindrum FD , ita ABC conus ad conum CDK ; cylindri sunt enim conorum ¹⁵ tripli. ergo & ut GH axis ad axem KL , ita ¹⁰ est ABC conus ad conum CDK . & cylindrus EB ad FD cylindrum. In basibus igitur æqualibus existentes coni & cylindri, inter se sunt ut altitudines. Quod demonstrare oportebat.

PROP. XV. THEOR.

Æqualium conorum, & cylindrorum bases & altitudines reciproce sunt proportionales; & quorum conorum & cylindrorum bases & altitudines reciproce sunt proportionales, illi inter se sunt æquales.

Sint æquales coni & cylindri, quorum bases quidem $ABCD$ $EFGH$ circuli, & diametri ipsorum AC EG ; axes autem KL MN ; qui quidem & conorum vel cylindrorum sunt altitudines, & compleantur cylindri AX EO . dico cylindrorum AX EO bases & altitudines reciproce proportionales esse, hoc est ut $ABCD$ basis ad basim $EFGH$, ita esse altitudinem MN ad altitudinem KL .

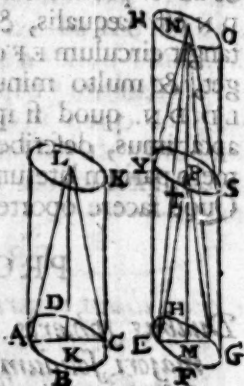
altitudo enim KL vel æqualis est altitudini MN , vel non æqualis. Sit primo æqualis: atque est AX cylindrus æqualis cylindro EO . qui autem eandem habent altitudinem coni & cylindri inter se sunt: ut bases æqualis igitur est basis $ABCD$ basi $EFGH$. est igitur ut basis $ABCD$ ad $EFGH$ basim, ita MN altitudo ad altitudinem KL . non sit autem altitudo KL altitudini MN æqualis, sed major sit MN , & auferatur ab ipsa MN altitudini LK æqualis PM , & per P secetur EO cylindrus plano TYS , oppositis planis circulatorum $EFGH$ RO parallelo, intelligaturque cylindrus ES cuius basis quidem $EFGH$ circulus, altitudo autem PM . quoniam igitur AX cylindrus æqualis est cylindro EO , alius autem aliquis est cylindrus ES ; erit ut AX cylindrus ad cylindrum ES , ita cylindrus EO ad ES cylindrum. Sed ut AX cylindrus ad cylindrum ES , ita basis $ABCD$ ad $EFGH$ basim; cylindri enim AX ES eandem habent altitudinem: ut autem cylindrus EO ad ES cylindrum



11. hujus.

13. hujus. drum, ita MN altitudo ad altitudinem MP . nam cylindrus EO secatur plano TY , oppositis planis parallelo, est igitur ut $ABCD$ basis ad basim $EFGH$, ita altitudo MN ad MP altitudinem. æqualis autem est MP altitudo altitudini KL , quare ut basis $ABCD$ ad $EFGH$ basim, ita MN altitudo ad altitudinem KL . æqualium igitur cylindrorum AX EO bases & altitudines reciproce sunt proportionales.

Sed si cylindrorum AX EO bases & altitudines sunt reciproce proportionales: hoc est ut $ABCD$ basis ad basim $EFGH$, ita altitudo MN ad KL altitudinem. dico AX cylindrum cylindro EO

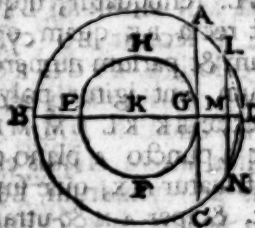


æqualem esse. iisdem enim constructis; quoniam ut $ABCD$ basis ad basim $EFGH$, ita altitudo MN ad KL altitudinem; altitudo autem KL æqualis est altitudini MP : erit ut $ABCD$ basis ad basim $EFGH$, ita MN altitudo ad altitudinem MP . sed ut $ABCD$ basis ad basim $EFGH$, ita AX cylindrus ad cylindrum ES , eandem enim habent altitudinem. ut autem MN altitudo ad altitudinem MP , ita cylindrus EO ad ES cylindrum: est igitur ut AX cylindrus ad cylindrum ES , ita cylindrus EO ad ES cylindrum. cylindrus igitur AX cylindro EO est æqualis. similiter autem & in conis. Quod demonstrare oportebat.

PROP. XVI. PROBL.

Duobus circulis circa idem centrum existentibus, in majore polygonum æqualium & numero parium laterum describere, quod minorem circulum non tangat.

Sint dati duo circuli $ABCD$ $EFGH$ circa idem centrum E . oportet in majore circulo $ABCD$ polygonum æqualium & numero parium laterum describere, non tangens minorem circulum $EFGH$. ducatur per K centrum recta linea BD , atque a puncto C ipsi BD ad rectos angulos ducatur AG , & ad C producat, &



16. tertii. AC circulum $EFGH$ tangit.

Itaque circumferentiam BAD bifariam secantes, & ejus dimidium rursus bifariam, & hoc semper facientes, tandem relinquemus

linquemus circumferentiam minorem ipsa AD . relinquatur, sitque LD : & a puncto L ad BD perpendicularis agatur LM , & ad N producat, junganturque LD DN . ergo LD ipsi DN est æqualis, & quoniam LN parallela est AC , & AC tangit circumulum $EFGH$; ipsa LN circumulum $EFGH$ non tanget, & multo minus tanget circumulum $EFGH$ rectæ lineæ LD DN . quod si ipsi LD æquales deinceps circulo $ABCD$ aptabimus, describetur in eo polygonum æqualium & numero parium laterum non tangens minorem circumulum $EFGH$. Quod facere oportebat.

PROP. XVII. PROBL.

Duabus sphaeris circa idem centrum existentibus, in majori solidum polyhedrum describere, quod minoris sphaera superficiem non tangat.

Intelligentur duæ sphaeræ circa idem centrum A . oportet in majori sphaera describere solidum polyhedrum minoris sphaeræ superficiem non tangens. secantur sphaeræ plano aliquo per centrum ducto; sectiones erunt circuli, quoniam diametro manente & semicirculo circumducto sphaera facta est; ergo in quacunque positione semicirculum intelligamus, quod per ipsum producit planum in superficie sphaeræ circumulum efficit, & constat circumulum esse maximum, cum diameter sphaeræ quæ & semicirculi diameter est, major sit omnibus rectis lineis quæ in circulo vel sphaera ducuntur: sit igitur in majori quidem sphaera circumulus $BCDE$, in minori autem circumulus FGH , & ducantur ipsorum duæ diametri ad rectos inter se angulos BD QE . occurrat BD minori circulo in G ; ducatur a puncto G ipsi AG ad rectos angulos GL , & jungatur AL . itaque circumferentiam EB bifariam secantes, & dimidium ipsius bifariam atque hoc semper facientes, tandem relinquemus quandam circumferentiam minorem ea parte circumferentiæ circuli BCD , quæ subtenditur a recta æquali ipsi GL . relinquatur, sitque circumferentia BK . minor igitur est recta BK quam GL ; eritque BK latus polygoni æqualium & parium numero laterum non tangens minorem circumulum. sint igitur polygoni latera in quadrante circuli BE , rectæ BK KL LM ME , & puncta K A producat ad N : & a puncto A plano circuli $BCDE$ ad rectos angulos constituatur AX , quæ superficie sphaeræ in puncto X occurrat, & per AX & utramque ipsarum BD KN plana ducantur, quæ ex jam dictis efficient in superficie sphaeræ maximos circulos. itaque efficiant, & sint in diametris BD KN

b 29. terti.

a Diffin. 14. undecimi.

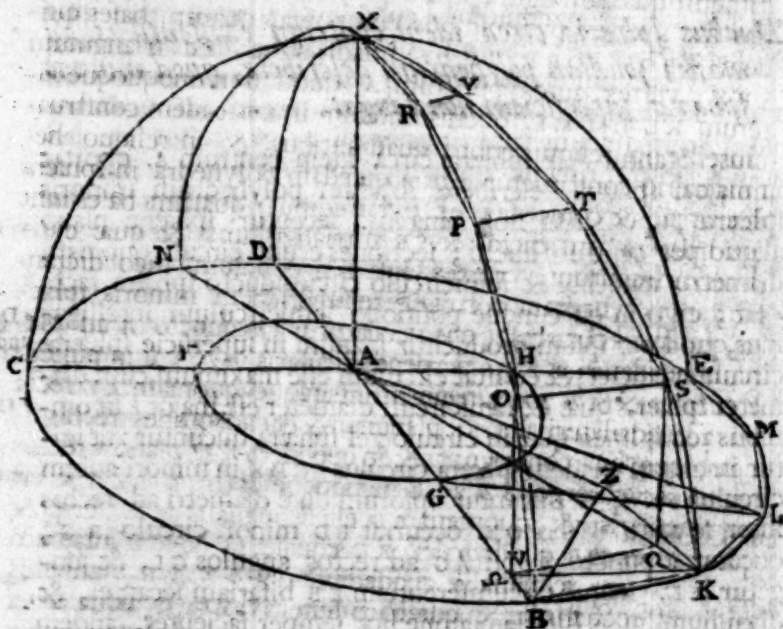
b 15. terti.

c 12. undecimi.

d 18. undecimi.

• 8. unde-
cimi.

KN eorum semicirculi BXD BXN. quoniam igitur XA recta est ad planum circuli BCDE, erunt omnia plana quæ per ipsam XA transeunt, ad idem circuli planum & recta: quare & semicirculi BXD KXN recti sunt ad idem planum. & quoniam semicirculi BED BXD KXN æquales sunt, in æqualibus enim consistunt BD KN diametris; erunt & eorum quadrantes BE BX KX inter se æquales. quot igitur latera polygoni sunt in quadrante BE, tot erunt & in quadrantibus BX KX, æqualia ipsis BK KL LM ME. describantur, & sint BO OP PR RX KS ST TY YX: junganturque SO TP YR, & ab ipsis OS ad planum circuli BCDE perpendiculares ducantur. cadent hæc in 6 communes plano-

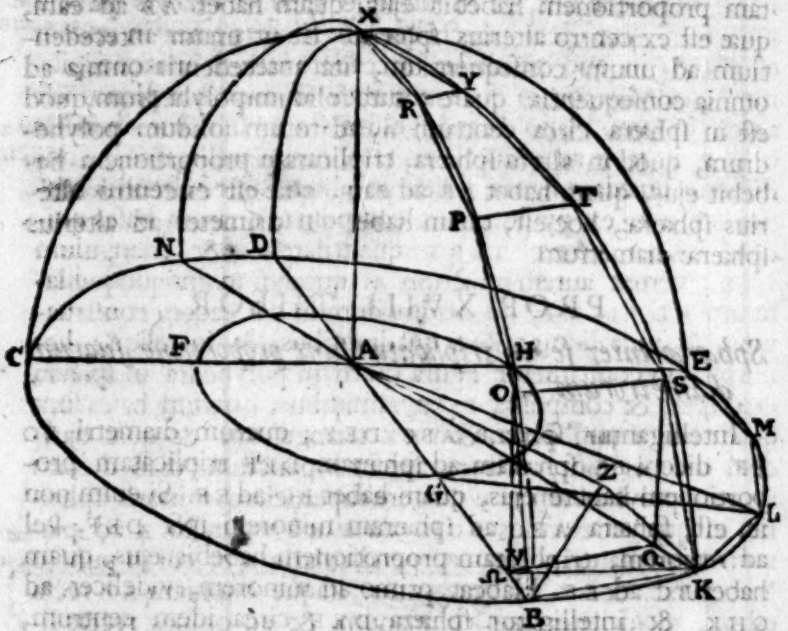


rum sectiones B D K N, quoniam & plana
semicircularum B X D K X N ad planum
circuli B C D E recta sunt. itaque cadant,
sintque O V S Q, & V Q jungatur. cum
igitur in æqualibus semicirculis B X D
K X N, æquales circumferentiæ sumptæ sint
B O K S, & ductæ perpendiculares O V S Q,
erit O V quidem ipsi S Q æqualis, B V vero
æqualis K Q. est autem & tota B A æqualis toti K A: ergo &
reliqua V A reliquæ Q A est æqualis. igitur ut B V ad V A, ita
K Q ad Q A: ideoque V Q ipsi B K parallela est. quod cum
utraq; ipsarum O G S Q recta sit ad circuli B C D E planum,
erit



erit ov ipsi so parallela. ostensa autem est & ipsi æqua- g 6. unde-
 lis. ergo ov so æquales ^b sunt & parallelae. & quoniam cimi.
 ov parallela est ipsi so , sed & parallela ipsi kb ; erit & b23. primi.
 so ipsi kb parallela: & ipsas conjungunt bo ks . ergo & i 9. unde-
 $kbos$ quadrilaterum est in uno ^a plano: nam si duæ rectæ cimi.
 lineæ parallelae sint, & in utraque ipsarum quævis puncta k 7. unde-
 sumantur, quæ dicta puncta conjungit recta linea in eodem cimi.
 est plano, in quo parallelae. & eadem ratione utraque ipso-
 rum quadrilaterorum $sopt$ $tpry$ in uno sunt plano. est
 autem in ⁱ uno plano & triangulum yrx . si igitur a punctis / 2. unde-
 o s p t r y ad a ductas rectas lineas intelligamus, con- cimi.
 stituetur quædam figura solida polyhedra inter circumferen-
 tias bx kx , ex pyramidibus composita, quarum bases qui-
 dem $kbos$ $sopt$ $tpry$ quadrilatera, & triangulum
 yrx ; vertex autem punctum a . quod si in unoquoque la-
 terum kl lm me , quemadmodum in kb eadem construa-
 mus, & in reliquis tribus quadrantibus, & in reliquo he-
 misphærio constituetur figura quædam polyhedra in sphaera
 descripta, & composita ex pyramidibus, quarum bases sunt
 quadrilatera jam dicta, & yrx triangulum, & quæ ejus-
 dem ordinis sunt, vertex autem a punctum. dico dictam
 figuram polyhedram non tangere superficiem minoris sphæ-
 ræ, in qua est circulus fg h . ducatur à ^m puncto a ad pla- m 11. unde-
 num quadrilateri $kbso$ perpendicularis az , cui in puncto cimi.
 z occurrat, & az zk jungantur. itaque quoniam az recta
 est ad quadrilateri $kbso$ planum, & ad omnes rectas li-
 neas, quæ ipsam contingunt, & in eodem sunt plano ⁿ rectos n 3. diffin.
 angulos faciet. ergo az ad utramque ipsarum bz zk est undecimi.
 perpendicularis. & quoniam ab est æqualis ak , erit &
 quadratum ex ab quadrato ex ak æquale, & sunt quadrato
 quidem ex ab æqualia ^o quadrata ex az zb , angulus o 47. primi.
 enim ad z rectus est; quadrato autem ex ak æqualia ex
 az zk quadrata. ergo quadrata ex az zb quadratis ex
 az zk æqualia sunt. commune auferatur quadratum ex az .
 reliquum igitur quod ex bz reliquo quod ex zk est æqua-
 le; ergo recta bz rectæ zk æqualis. Similiter ostendemus,
 & quæ à puncto z ad puncta o s ducuntur utrique ipso-
 rum bz zk æquales esse. circulus igitur centro z & inter-
 vallo una ipsarum zb zk descriptus etiam per puncta o s
 transibit. & quoniam in circulo est bks quadrilaterum, &
 sunt æquales ob bk ks & minor os , erit angulus bzk
 obtusus; ideoque bk major quam bz , sed & gl quam bk
 est major, multo igitur major est gl quam bz . & qua-
 dratum ex gl quadrato ex bz majus. & cum æqualis sit al
 ipsi ab , erit quadratum ex al , quadrato ex ab æquale;
sed

sed quadrato quidem ex AL æqualia sunt quadrata ex AG
 GL , quadrato autem ex AB æqualia quadrata ex BZ ZA ,
quadrata igitur ex AG GL æqualia sunt quadratis ex BZ
 ZA , quorum quadratum ex BZ minus est quadrato ex GL ;
ergo reliquum ex ZA quadratum majus est quadrato ex AG .



& ob id recta linea ZA major est recta AG , atque est AZ quidem ad unam polyhedri basim, AG vero ad superficiem perpendicularis, quare polyhedrum minoris sphaerae superficiem non tanget. Duabus igitur sphaeris circa idem centrum existentibus, in majori solidum descriptum est minoris sphaerae superficiem non tangens. Quod facere oportebat.

Cor. Quod si etiam in altera sphaera solido polyhedro descripto, in sphaera BCDE simile solidum polyhedrum describatur, habebit solidum polyhedrum in sphaera BCDE ad solidum polyhedrum in altera sphaera triplicatam proportionem ejus, quam diameter sphaerae BCDE habet ad alterius sphaerae diametrum. divisus enim solidis in pyramides numero aequales, & ejusdem ordinis: erunt pyramides similes. similes autem pyramides inter se in triplicata sunt proportionem homologorum laterum. ergo pyramis cujus basis est KBO quadrilaterum, vertex autem punctum A, ad pyramidem in altera sphaera ejusdem ordinis triplicatam proportionem habet ejus, quam latus homologum habet ad homologum

mo
cir
riu
fun
du
tan
qu
tiu
om
est
dru
bel
riu
sph

Sp

EF
por
ita
ad
hab
GH
circ
DE
ram
lidu

ptu
ad
pr
A B C
ejus
G H
poly

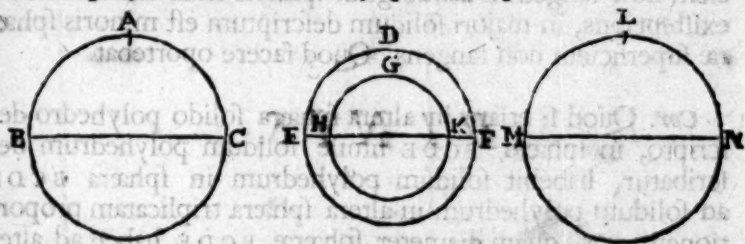
mololum latus; hoc est, quam habet AB ex centro sphaerae circa centrum A existentis ad eam, quae est ex centro alterius sphaerae. similiter & unaquaeque pyramis earum, quae sunt in sphaera circa centrum A ad unamquamque pyramidum ejusdem ordinis, quae sunt in altera sphaera, triplicatam proportionem habebit ejus, quam habet AB ad eam, quae est ex centro alterius sphaerae. Et ut unum antecedentium ad unum consequentium, ita antecedentia omnia ad omnia consequentia. quare totum solidum polyhedrum, quod est in sphaera circa centrum A , ad totum solidum polyhedrum, quod in altera sphaera, triplicatam proportionem habebit ejus, quam habet AB ad eam, quae est ex centro alterius sphaerae, hoc est, quam habet BD diameter ad alterius sphaerae diametrum.

PROP. XVIII. THEOR.

Sphaerae inter se in triplicata sunt proportionem suarum diametrorum.

Intelligentur sphaerae ABC DEF ; quarum diametri BC EF . dico ABC sphaeram ad sphaeram DEF triplicatam proportionem habere ejus, quam habet BC ad EF . Si enim non ita est, sphaera ABC ad sphaeram minorem ipsa DEF , vel ad majorem, triplicatam proportionem habebit ejus, quam habet BC ad EF . Habeat primo ad minorem, videlicet ad GHK . & intelligatur sphaera DEF circa idem centrum, circa quod sphaera GHK : describaturque in majori sphaera DEF solidum polyhedrum non tangens a minorem sphaeram GHK in superficie; & in sphaera ABC describatur solidum polyhedrum simile ei, quod in sphaera DEF descri-

17. hujus.



ptum est. solidum igitur polyhedrum, quod in sphaera ABC ad solidum polyhedrum, quod in sphaera DEF triplicatam proportionem habet ejus, quam BC ad EF . habet autem ABC sphaera ad sphaeram GHK triplicatam proportionem ejus, quam BC ad EF ergo ut ABC sphaera ad sphaeram GHK , ita solidum polyhedrum in sphaera ABC ad solidum polyhedrum in sphaera DEF ; & permutando, ut ABC

6 Corol an-
cedente.

sphæra ad solidum polyhedrum, quod in ipsa est, ita $G H K$ sphæra ad solidum polyhedrum, quod in sphæra $D E F$. major autem est sphæra $A B C$ solido polyhedro, quod est in ipsa. ergo & $G H K$ sphæra polyhedro, quod in sphæra $D E F$ est major, sed & minor, ab ipso enim comprehenditur, quod fieri non potest. non igitur $A B C$ sphæra ad sphæram minorem ipsa $D E F$ triplicatam proportionem habet ejus, quam $B C$ ad $E F$. similiter ostendemus neque $D E F$ sphæram ad sphæram minorem ipsa $A B C$ triplicatam habere proportionem ejus, quam habet $E F$ ad $B C$. dico insuper sphæram $A B C$ neque ad majorem sphæram ipsa $D E F$ triplicatam proportionem habere ejus, quam $B C$ ad $E F$. si enim fieri potest, habeat ad majorem $L M N$. invertendo igitur sphæra $L M N$ ad $A B C$ sphæram triplicatam proportionem habet ejus, quam diameter $E F$ ad $B C$ diametrum: ut autem sphæra $L M N$ ad $A B C$ sphæram, ita sphæra $D E F$ ad sphæram quandam minorem ipsa $A B C$, quoniam sphæra $L M N$ major est ipsa $D E F$. ergo & $D E F$ sphæra ad sphæram minorem ipsa $A B C$ triplicatam proportionem habet ejus, quam $E F$ ad $B C$; quod fieri non posse ostensum est. non igitur $A B C$ sphæra ad sphæram majorem ipsa $D E F$ triplicatam proportionem habet ejus, quam $B C$ ad $E F$. ostensum autem est neque ad minorem. ergo $A B C$ sphæra ad sphæram $D E F$ triplicatam proportionem habebit ejus, quam $B C$ ad $E F$. Quod demonstrare oportebat.



F I N I S.



[illegible]